Soluciones Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1)a)

$$(S)\begin{cases} -x+y-z=-1 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+z=2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema y la escalerizamos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 4 & 2 & -1 & \vdots & 5 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 6 & -5 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente nos queda

$$(S1)\begin{cases} -x+y-z=-1 \\ 6y-5z=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Las operaciones efectuadas para pasar de S a S1 fueron: Se sustituyo la segunda fila de la matriz ampliada de (S) por 4F1+F2 y la tercera fila de (S) por F1+F3.

Ahora empezamos por la última ecuación donde hallamos el valor de y, sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación hallamos z (6(1)-5z=1 despejando z obtenemos z=1) y sustituyendo en la primera ecuación por los valores de z e y hallamos x. Despejamos x de la primera ecuación:

$$-x=-1-y+z \longleftrightarrow -x=-1-1+1 \longleftrightarrow x=1.$$

El sistema tiene una única solución Sol(S)= $\{(1,1,1)\}$ Decimos que el Sistema es Compatible y Determinado abreviadamente, S.C.D

Ejercicio 1)c)

$$(S)\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 6x+3y-1z=2 \\ x+z=2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 6 & 3 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a escalerizarlar, para lo cual dejamos la primera fila fija y la utilizamos como "pivot" para combinar con las otras dos, obteniendo ceros en la segunda y tercera posición de la primera columna.

Las operaciones a realizar son las siguientes: A la segunda fila la sustituimos por -2F1+ F2 y a la tercera la sustituimos por F1 -3F3, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -6 \end{pmatrix}$$

Ahora la primera y segunda fila tienen la forma adecuada. El segundo paso consiste en sustituir la tercera fila de forma tal que en la primera posición y en la segunda posición tengamos ceros. Para lo cual combinamos adecuadamente la segunda y la tercera fila. Observar que en el segundo paso la primera fila ya no interviene y es análogo al paso 1 pero utilizando la segunda fila como pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente nos queda

$$(S1)\begin{cases} 3x + y - z = -0 \\ 1y + 1z = 2 \\ -5z = -8 \end{cases}$$

El sistema S es equivalente al sistema S1 por lo tanto el conjunto de soluciones de S y S1 son iguales, Sol(S)=Sol(S1). Pero resolver S1 es sencillo por tener la forma escalerizada. Procedemos a hallar z de la ultima ecuación y después sustituimos en la segunda hallando y. Con los valores de z e y hallados, sustituyendo en la primera ecuación hallamos x. El procedimiento utilizado para ir hallando las incógnitas en el sistema escalerizado lo llamamos sustitución hacia atrás.
De la tercera ecuación determinamos z entonces $z = \frac{8}{5}$, de la segunda determinamos y

$$y = 2 - z = 2 - \tfrac{8}{5} = \tfrac{2}{5}$$

Luego sustituyendo por el valor de z e y en la primera ecuación determinamos x.

$$x = \tfrac{(-y+z)}{3} = \tfrac{(-\frac{2}{5}+\frac{8}{5})}{3} = \tfrac{2}{5}$$

El sistema tiene una única solución $Sol(S) = \{(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{8}{5})\}$ Decimos que el Sistema es Compatible y Determinado, abreviadamente S.C.D

Ejercicio 2)a)

$$(S)\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(\lambda-5)z=2 \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 1 & (\lambda-5) & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a escalerizarla, para lo cual, dejamos la primera fila fija y la utilizamos como "pivot" para combinar con las otras dos, obteniendo ceros en la segunda y tercera posición de la primera columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-4) & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz ya quedo escalerizada, observar que esto no tiene porque ser siempre así y, si no hubiera quedado escalerizada, realizaríamos un paso más tomando la segunda fila fija y combinándola con la tercera.
El sistema equivalente nos queda:

$$(S1)\begin{cases} x+y-z=2 \\ y+2z=1 \\ (\lambda-4)z=0 \end{cases}$$

Si $\boldsymbol{\lambda-4=0\leftrightarrow\lambda=4}$

Vemos que cualquier valor de z verifica la tercera ecuación por lo tanto puede ser elegido libremente y para cada valor de z tendremos una solución del sistema (S). Por ejemplo, si $z=1$ obtenemos $y=1$ (en la segunda ecuación) y $x=2$ (de la primer ecuación).
Entonces $z=z$, $y=1-2z$ (obtenido al despejar el valor de y de la segunda ecuación) y sustituyendo z por z y la incógnita y por $1-2z$ en la primera ecuación hallamos $x=1+3z$.

$$Sol(S)=\{(1+3z,1-2z,z),\forall z\in\mathbb{R}\}$$

Vemos que el sistema tiene infinitas soluciones. Entonces, por tener solución el sistema es compatible y por tener infinitas es indeterminado, por lo tanto el Sistema es Compatible e Indeterminado, SCI. Como solamente una de las incógnitas puede elegirse libremente decimos que tiene un grado de libertad.

Si $\boldsymbol{(\lambda-4)\neq 0\leftrightarrow\lambda\neq 4}$

El único valor de z posible para obtener un 0 en $(\lambda-4)z=0$ es $z=0$ y por lo tanto en la segunda ecuación del sistema escalerizado, sustituimos $z=0$ y hallamos $y=1$, en la primera ecuación del sistema escalerizado sustituimos por los valores de $z=0$ e $y=1$ y hallamos $x=1$.
El sistema tiene una única solución $Sol(S)=\{(1,1,0)\}$

Ejercicio 3)d) La suma de las edades de un padre y de sus dos hijos es 48.

Edad de padre $=x$; Edad del hijo mayor$=y$; Edad del hijo menor$=z$

$$x+y+z=48$$

Dentro de 10 años (considerando que todos cumplieron años) las edades correspondientes son: Edad de padre $=x+10$; Edad del hijo mayor$=y+10$; Edad del hijo menor$=z+10$

Se sabe que el doble de la suma de las edades de los hijos excederá en 6 la edad del padre entonces $2(z+10+y+10)=(x+10)+6 \leftrightarrow x-2y-2z=24$

Cuando nació el hijo pequeño, las edades correspondientes eran:
Edad del padre=x-z; (El padre tenia z años menos) Edad del hijo mayor=y-z (El hijo mayor tenia z años menos) y se sabe que la edad del padre superaba en 26 unidades el triple de la edad del hijo mayor por lo tanto: $(x-z)=3(y-z)+26 \leftrightarrow x-3y+2z=26$

$$(S)\begin{cases} x+y+z=48 \\ x-2y-2z=24 \\ x-3y+2z=26 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos como solución: $Sol(S)=\{(40,6,2)\}$.

Ejercicio 4)a)

$$\begin{cases} -x+2y+z=5 \\ x-y+3z=-1 \\ -x+3y+5z=m \end{cases}$$

Escribimos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 1 & -1 & 3 & \vdots & -1 \\ -1 & 3 & 5 & \vdots & m \end{pmatrix}$$

Se Sustituye la segunda fila por F1+F2 y la tercera fila por -F1+F3 quedando

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & m-5 \end{pmatrix}$$

Ahora dejamos la segunda fila fija y sustituimos la tercera fila de la matriz ampliada por -F2+F3 quedando

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & -1 & 4 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & m-9 \end{pmatrix}$$

Si $m-9=0 \Leftrightarrow m=9 \Rightarrow Rango(A)=Rango(A|b)<3$ (3 es el número de incógnitas).
Como el Rango de la matriz del sistema y el de la matriz ampliada son iguales el Teorema de Rouche-Frobenius nos permite afirmar que el sistema es compatible, además el mismo teorema nos permite afirmar que como el Rango(A) es menor que 3 (Número de incógnitas del sistema) estamos ante un caso de sistema indeterminado, así que si $m=9$ el Sistema es Compatible e Indeterminado.

Ejercicio 6)

Dadas las ecuaciones $\begin{cases} 3x-y+z=3 \\ x-2y-3z=1 \end{cases}$ agregar una tercera ecuación de manera que el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas resultante tenga a $(0,-2,1)$ como única solución.

Estamos ante el caso de un Sistema con más incógnitas, (tres en este caso) que ecuaciones(dos en este caso). A el rango de la matriz le llamamos p, Rango(A)=p (p puede ser en este caso 2 o 1 puesto que el Rango de la matriz es menor o igual al número de ecuaciones) entonces Rango(A)=p es menor que n (número de ecuaciones) por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema no puede ser compatible determinado, será compatible indeterminado o incompatible.

Escribimos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & -2 & -3 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Escalerizamos para lo cual sustituimos la segunda fila por F1 -3F2 quedando

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & 10 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente queda:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ 5y + 10z = 0 \end{cases}$$

Despejamos por ejemplo y en función de z de la segunda ecuación:

$$5y + 10z = 0 \leftrightarrow y = \frac{(-10z)}{5} \leftrightarrow y = -2z$$

sustituyendo en la primera ecuación y en función de z y despejando x nos queda:

$$x = \frac{(3-z+y)}{3} \leftrightarrow x = \frac{(3-z-2z)}{3} \leftrightarrow x = 1 - z$$

$Sol(S) = \{(1 - z, -2z, z) \forall z \in \mathbb{R}\}$.

El sistema resulta compatible e indeterminado con un grado de libertad puesto que a z le podemos dar cualquier valor real. Ahora bien me piden agregar una ecuación para que el sistema tenga como solución (0,-2,1) entonces alcanza con tomar $z = 1$ por el analizado la solución queda determinada y si $z = 1$ queda $y = -2$ y $x = 0$ La ecuación que agregamos es $z = 1$

¿Hay otras soluciones? ¿Cuántas? Les propongo que después de ver los temas de geometría volvamos sobre este ejercicio y hagamos una interpretación geométrica.