Relaciones de orden

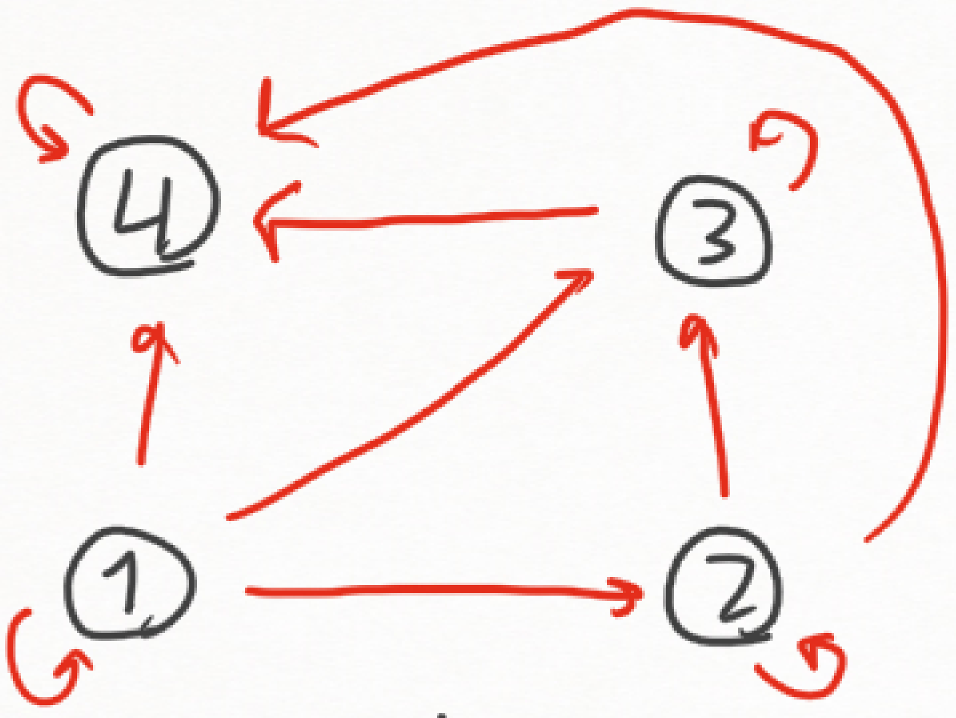
R debe ser
- reflexiva
- antisimétrica
- transitiva

Ej: $A = \{1,2,3,4\}$ "$R: \leq$" $aRb \iff a \leq b$

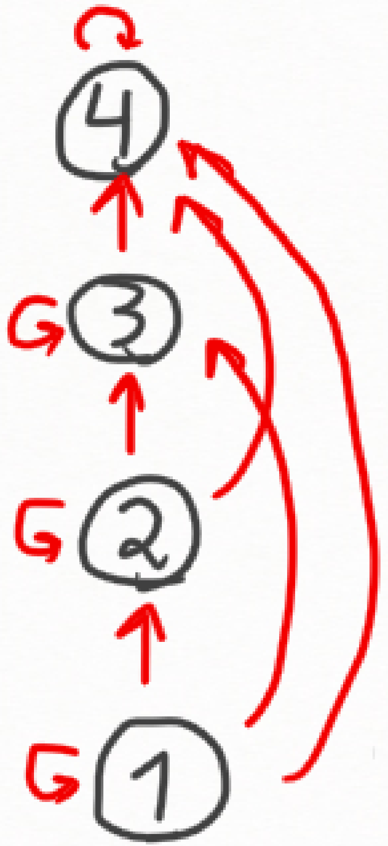
- Reflexiva: $a \leq a$ ✓
- Antisimétrica: $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$ ✓
- Transitiva: $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ✓

$\Longrightarrow$ $\leq$ es relación de orden

Grafo dirigido



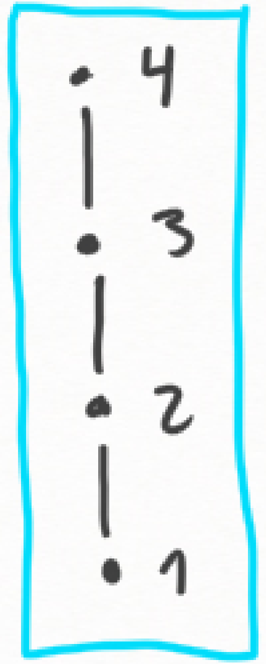
una forma de dibujarlo



mismo grafo dibujado de otra forma

Diagrama de Hasse

Forma simplificada del grafo que sirve solamente para relaciones de orden



Está implícito:
- Todas las flechas son hacia arriba
- lazos de reflexividad
- las flechas que se deducen de transitividad

Otra relación de orden

$A = \{a, b, c, d\}$

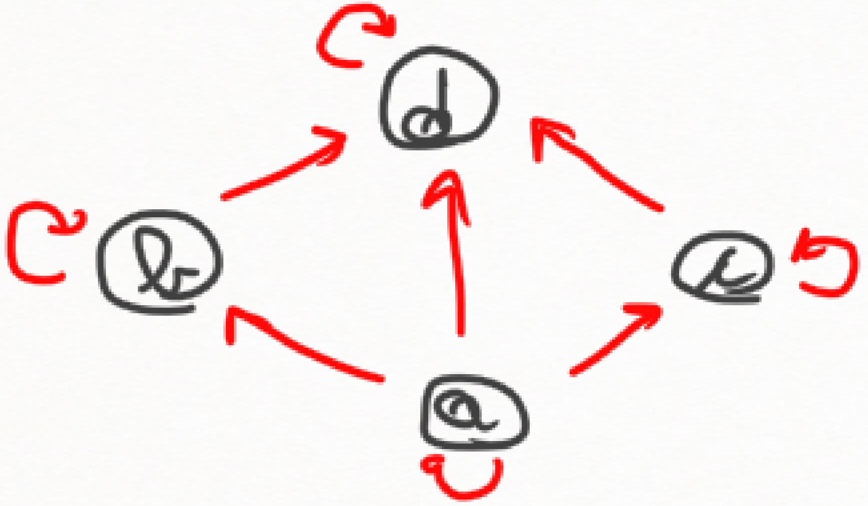
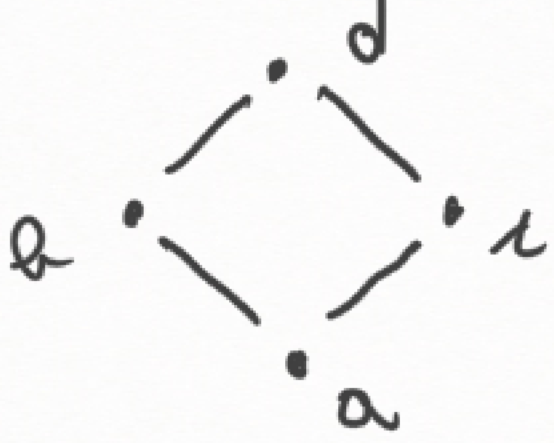


Diagrama de Hasse



Está implícito que aRd

¿Qué pasa entre b y c? No están relacionados

"ninguno está por arriba ni por debajo del otro"

Esta relación es un orden parcial

¿Reflexiva? Sí.

Tiene todos los lazos

¿Antisimétrica? Sí

Contraejemplos: $x \neq y$ tq xRy y yRx

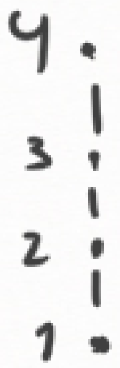
No hay contraejemplos $\Rightarrow$ es antisimétrica.

¿Transitiva? Sí

xRy y yRz $\nearrow$ $aRb, bRd \Rightarrow aRd$ ✓

$\searrow$ $aRc, cRd \Rightarrow aRd$ ✓

En el ejemplo anterior



$\forall x, y \in A \quad xRy$ o yRx

Orden total

El diagrama de Hasse debe ser una línea

$P_0, \dots, P_9$

$P_9 < P_7, P_2$ $\quad P_7 < P_6$ $\quad P_6 < P_4$ $\quad P_2 < P_8, P_5$ $\quad P_5 < P_3, P_0$

$P_8 < P_3, P_4$ $\quad P_3, P_4, P_0 < P_1$

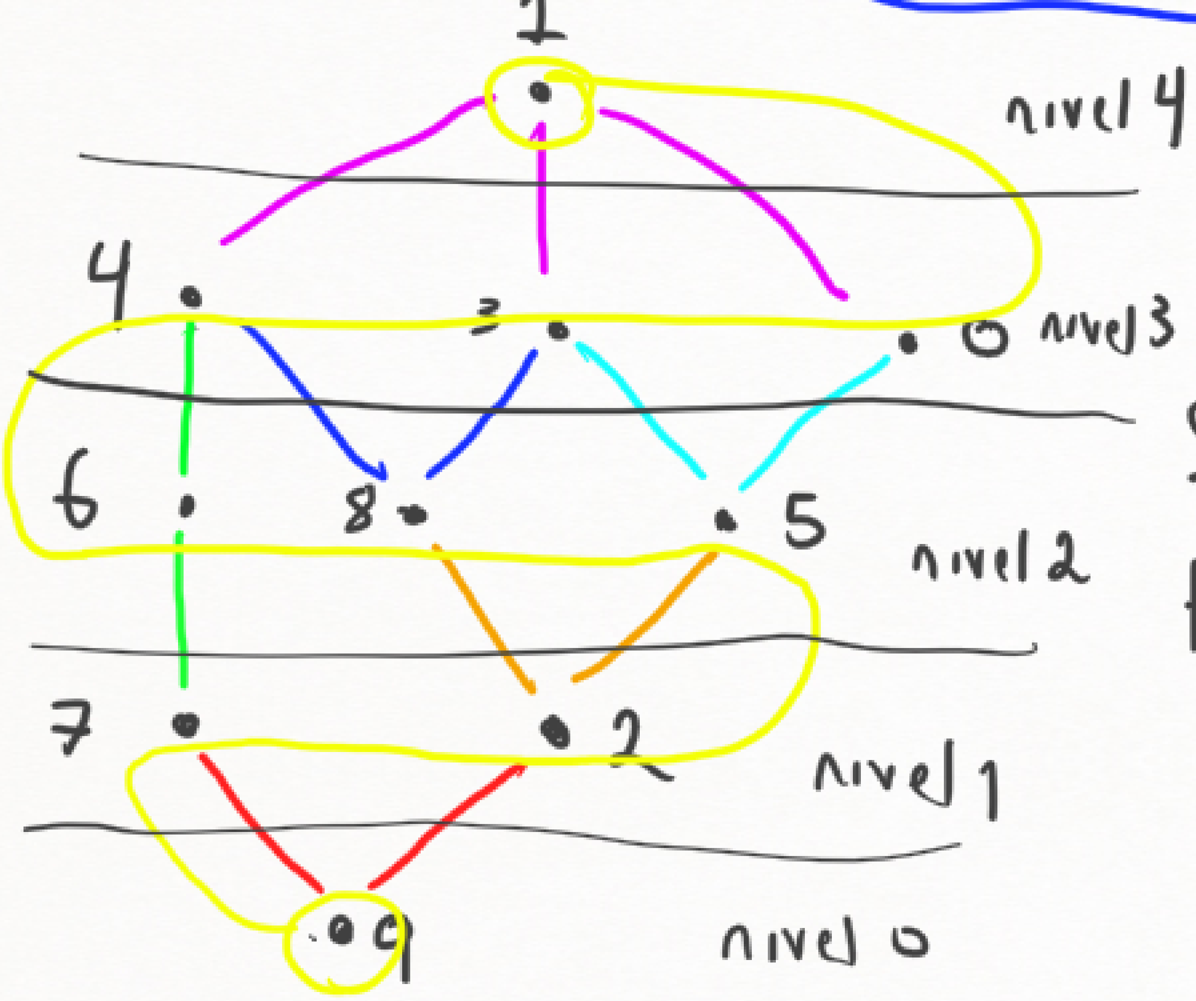


Diagrama de Hasse

Orden parcial

Hay que dar un orden de ejecución.

Siempre sirve ir de abajo hacia arriba "por pisos"

$P_9, P_7, P_2, P_5, P_8, P_6, P_4, P_3, P_0, P_1$

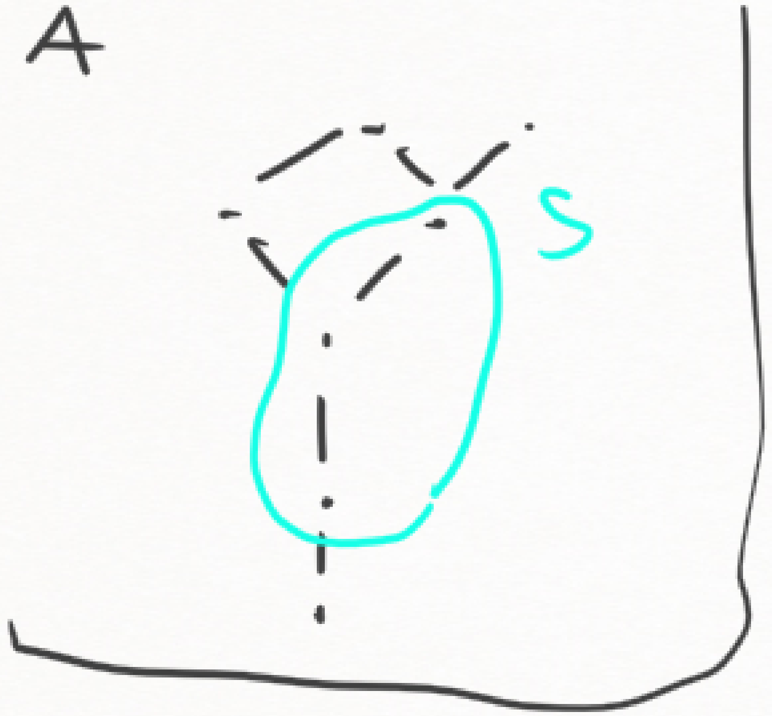
Cosas que no podría hacer

- P_2 antes que P_9
- P_3 antes que P_2
- P_1 antes que P_5

$xRy \Rightarrow x$ debe ir antes que y

si xRy y $yRx \Rightarrow$ pueden ir en cualquier orden.

Retículos



R relación de orden sobre A, $S \subseteq A$

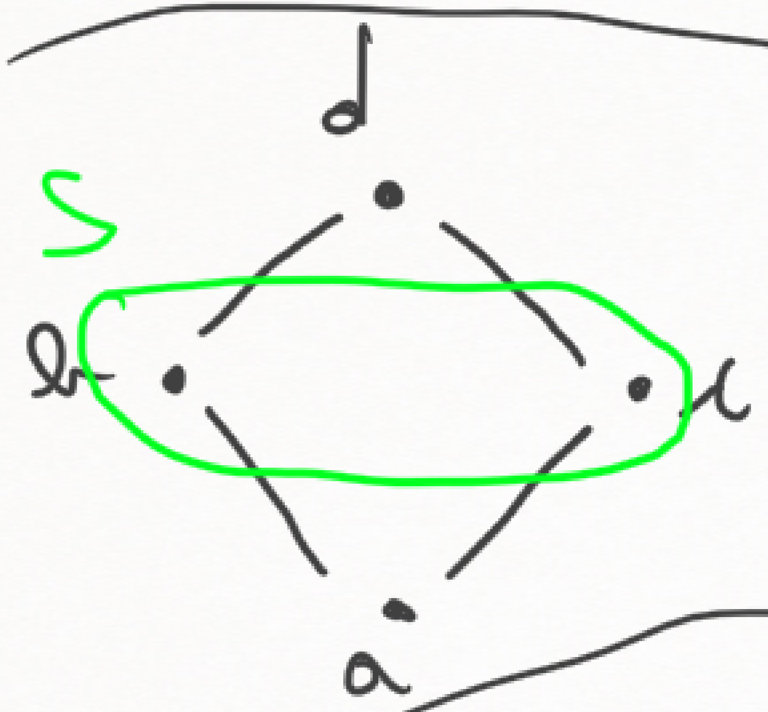
$m \in S$ es mínimo de $S \iff \forall b \in S \; mRb$

$M \in S$ es máximo de $S \iff \forall a \in S \; aRM$

$x \in A$ es cota superior de $S \iff \forall a \in S \; aRx$

$y \in A$ es cota inferior de $S \iff \forall b \in S \; yRb$

(ninguna de estas cosas tiene xq existir)



$S = \{b, c\}$ No tiene máximo $(x \in S \,/\, \forall y \in S \; yRx)$

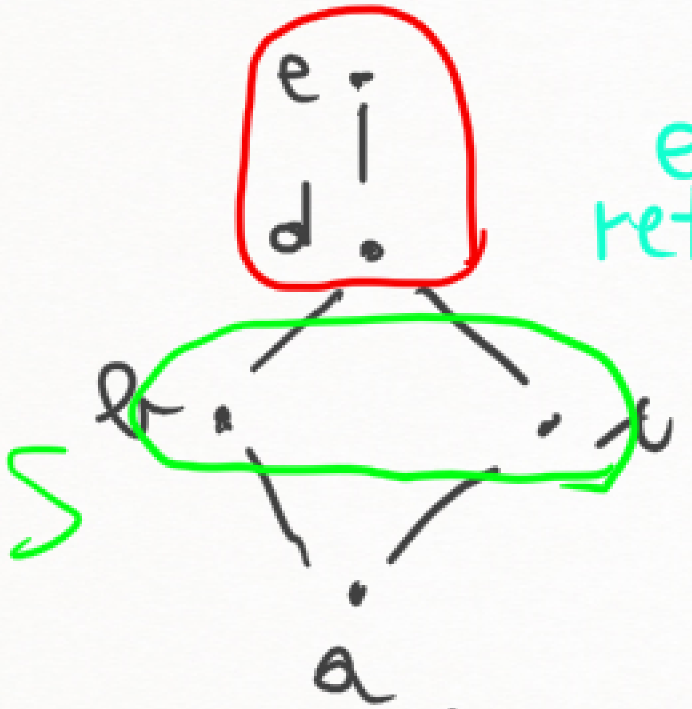
d es cota superior $\forall x \in S \; xRd \rightarrow bRd$ ✓, cRd ✓

$x \in A$ es supremo de $S \iff x$ es el mínimo de las cotas superiores de S

$x \in A$ es ínfimo de $S \iff x$ es máximo de las cotas inferiores de S

(Para órdenes parciales no tienen xq existir)

$x \in A$ sup S $\iff$ x mínimo de cotas superiores.

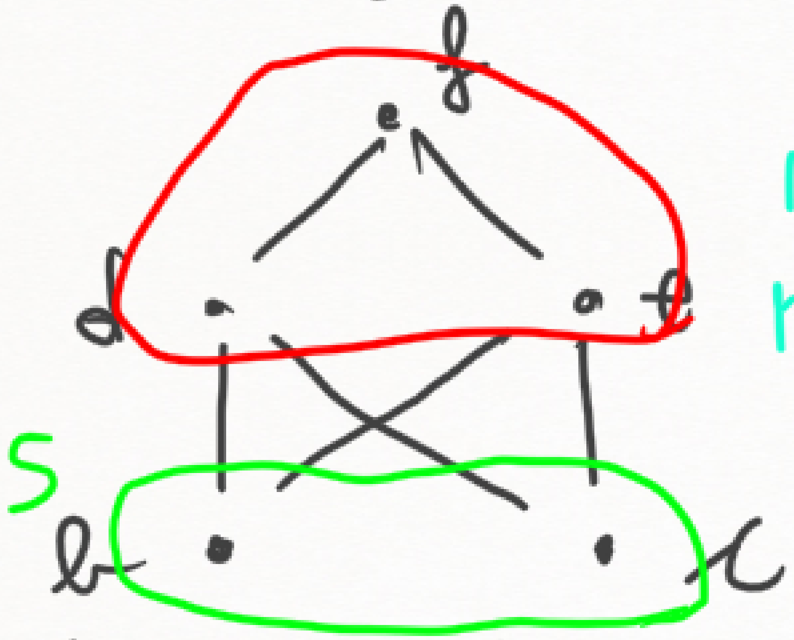


es retículo

Cotas superiores de S

mínimo de las cotas superiores: d

$\sup(S) = d$



No es retículo

(No es retículo porque $S=\{b,c\}$ no tiene sup)

Cotas superiores de S

mínimo de las cotas superiores: $\nexists$

$\sup(S)$ $\nexists$

Retículo: $\forall x,y \in A$ existe supremo e ínfimo de $\{x,y\}$

(Obs: máximo $\Rightarrow$ supremo   mínimo $\Rightarrow$ ínfimo)

$S \subseteq A \times A$ rel de eq

buscar f función tq $S = R_f$

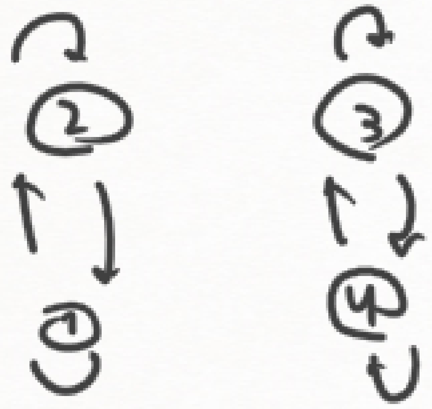
$x R_f y \iff f(x) = f(y)$

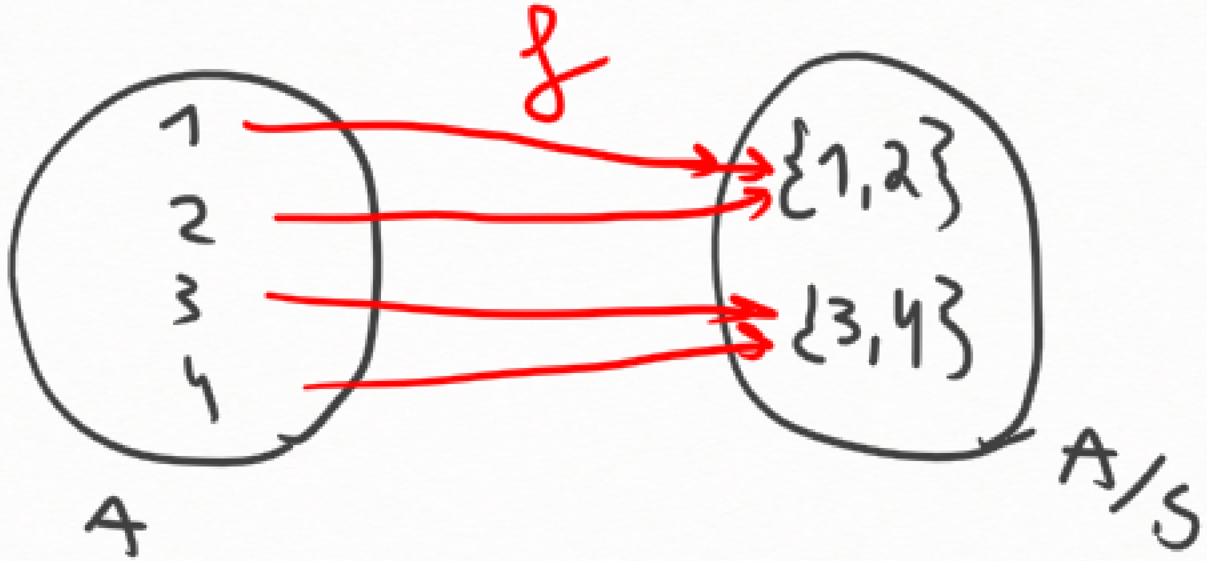
Sea S una relación de eq en A.

Recordar $A/_S = \{[a] / a \in A\}$

sea $f : A \to A/_S$ $\quad f(a) = [a]$

$$a R_f b \iff f(a) = f(b) \iff [a] = [b] \iff a S b$$





$a R_f b \iff a S b$

R_f y S son la misma relación