

P6	OF2021	19-21
P7	OF2021	22,23

Relaciones de equivalencia

Ej 5 - Ej 8

R es de equivalencia $\Leftrightarrow R$ es reflexiva, simétrica y transitiva

R relación de equivalencia sobre el conjunto A $R \subseteq A \times A$

$$A = \mathbb{Z}$$

R es: $a R b \Leftrightarrow a - b = 2$
($a - b$ es múltiplo de 2)

Vamos a probar que R es de equivalencia. Hay que probar 3 cosas:

R reflexiva

$$\forall x \in A \quad x R x$$

Sea $x \in A$ genérico

$$x R x \Leftrightarrow$$

$$x - x = 2$$

$$0 = 2$$

$$0 = 2 \times 0$$

mult por -1 en las dos

R simétrica

$$x R y \Rightarrow y R x$$

Assumir $x R y$ y probar $y R x$

$$\text{sabemos } x R y \Rightarrow x - y = 2$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = 2 \times k$$

$$\Rightarrow y - x = 2 \times (-k)$$

$$y - x = 2 \times (-k)$$

$$\Rightarrow y - x = 2$$

$$\Rightarrow y R x$$

$$x = 2$$

Significa

$$\exists k \in \mathbb{Z} / x = 2 \times k$$

R transitiva xRy y $yRz \Rightarrow xRz$

Assumimos xRy , yRz vamos a probar que xRz

$xRy : x - y = k_1 \times 2$ $yRz : y - z = k_2 \times 2$ lo que sumamos

lo que queremos probar es $x - z = 2$

sumamos $x - y = k_1 \times 2$ $y - z = k_2 \times 2$ $x - y + y - z = k_1 \times 2 + k_2 \times 2$

$\begin{array}{c} \text{sumamos} \\ \hline \text{las} \\ \text{igualdades} \end{array}$

$\Rightarrow x - z = k_1 \times 2 + k_2 \times 2 = (k_1 + k_2) \times 2 = 2$ ✓

Otra Forma:

$x - z = x - y + y - z = k_1 \times 2 + k_2 \times 2 = (k_1 + k_2) \times 2 = 2$

$\Rightarrow xRz$

$\begin{array}{c} \text{suma} \\ \text{esta} \end{array} \begin{array}{c} y \\ - \\ y \end{array}$

Probamos que la relación R sobre $\mathbb{Z}$
 $aRb \Leftrightarrow a-b=2$ es de equivalencia.

Clases de equivalencia y conjunto cociente

R la de arriba y $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$C_1 = \{1, 3, 5\} \quad C_2 = \{2, 4, 6\}$$

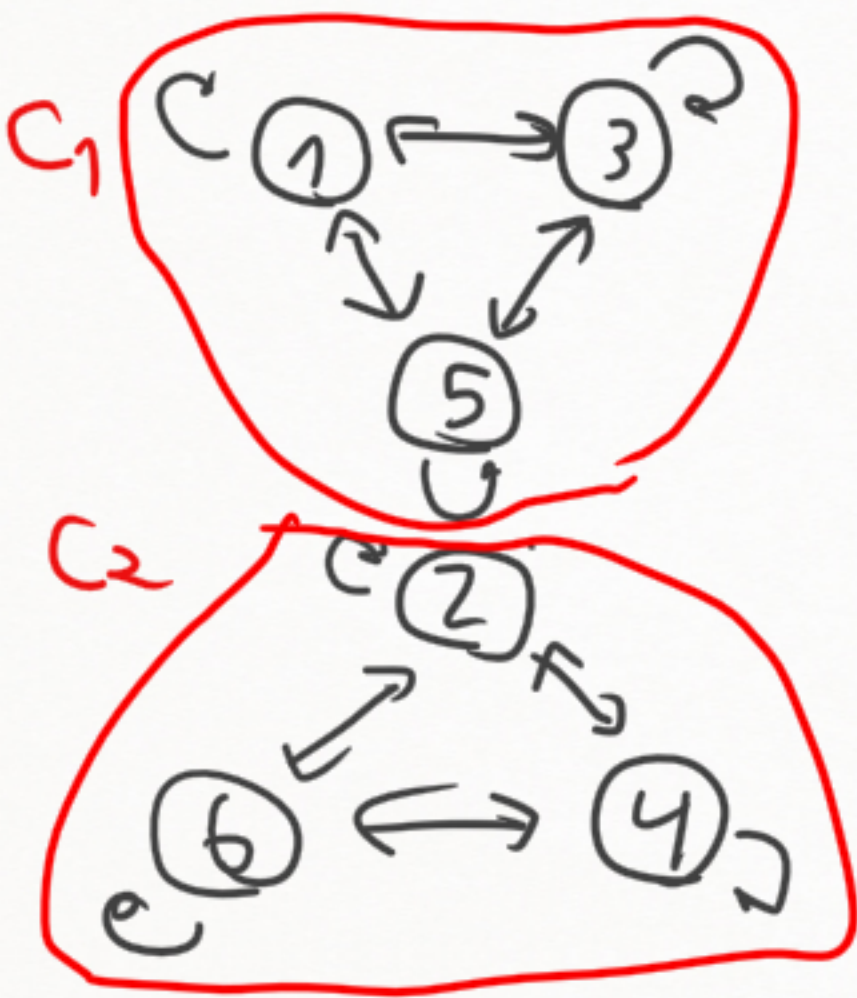
clases de equivalencia

- Dentro de cada clase todos están relacionados con todos. $\forall x, y \in C_1, xRy$ $\forall x, y \in C_2, xRy$

- Entre dos clases distintas no hay ninguna relación $\forall x \in C_1, \forall y \in C_2, x \not R y$ y $y \not R x$

C_2 Las clases de equivalencia son una partición de A que cumple esas dos condiciones

Conjunto cociente: El conjunto de las $A/R = \{C_1, C_2\}$
clases de equivalencia



Para cada $a \in A$ $[a]$: clase de equivalencia de a

$$[1] = C_1 = \{1, 3, 5\} = [3] = [5]$$

$$[2] = C_2 = \{2, 4, 6\} = [4] = [6]$$

$$[1] = \text{la \u00fanica clase de equivalencia a la que pertenece 1.}$$

$$= \{1, 3, 5\} = C_1$$

$$A/R = \{C_1, C_2\} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$$

A/R es un conjunto formado por otros conjuntos (las 2 clases)
 \u00baj cu\u00e1ntos elementos tiene A/R ? 2 que son $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 4, 6\}$

$$\{1, 3, 5\} \in A/R \quad \text{per} \quad 1 \notin A/R \quad 3 \notin A/R \quad 5 \notin A/R$$

Ej 5 (a) $A = \mathbb{Z}$ $aRb \Leftrightarrow a^2 = b^2$

$$aRb \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Leftrightarrow |a| = |b|$$

$$\boxed{aRb \Leftrightarrow |a| = |b|}$$

Reflexivo: aRa ? $aRa \Leftrightarrow |a| = |a|$ ✓ porque = es reflexivo

Simétrico: $aRb \Rightarrow bRa$ es decir $|a| = |b| \Rightarrow |b| = |a|$ ✓ porque = es simétrico

Transitivo: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

es decir $|a| = |b|$ y $|b| = |c| \Rightarrow |a| = |c|$ ✓ porque = es transitivo

$\Rightarrow$ Como probamos que R es reflexivo, simétrico y transitivo,
es una relación de equivalencia

Vedmos cómo son las clases de eq.

Dado un $a \in \mathbb{Z}$ ¿cuáles son los $b \in \mathbb{Z}$ tq $a R b$?

$$a R b \Leftrightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b = -a \end{cases}$$

en un conjunto
no se cuentan
repetidas

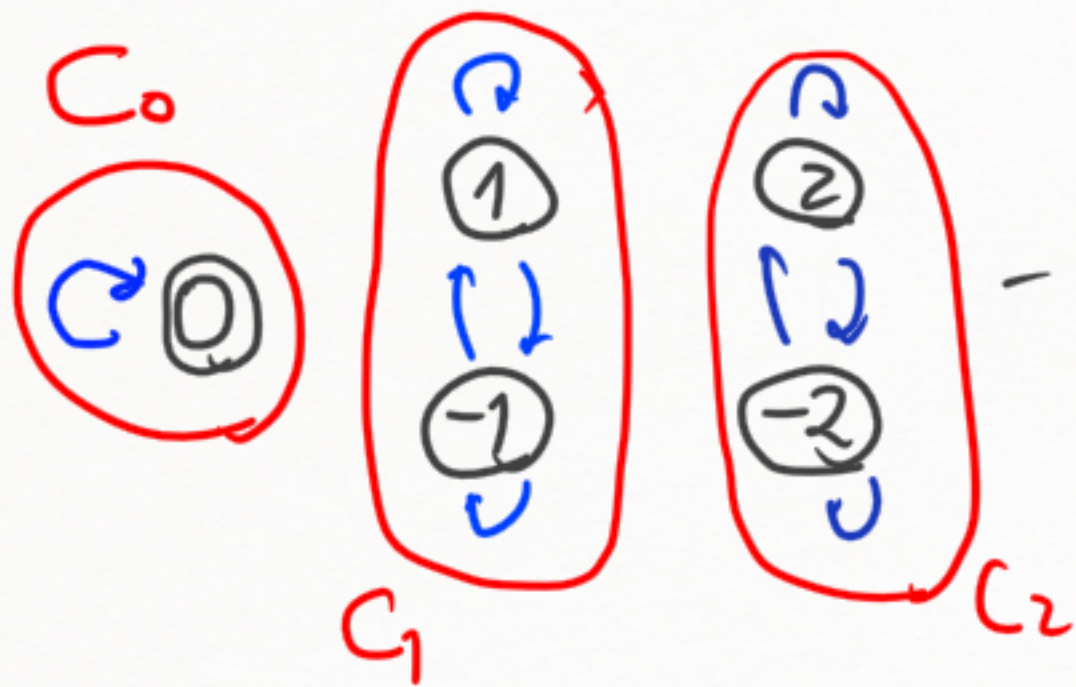
$$\Rightarrow [a] = \{a, -a\}$$

(en particular $[0] = \{0, -0\} = \{0, 0\} = \{0\}$)

Hoy infinitas clases de equivalencia

$$A/R = \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots\}$$

$$= \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \dots, \{n, -n\}, \dots\}$$



Relaciones n-grad

$$\begin{pmatrix} & & m \\ & & \\ & m & \\ & & \end{pmatrix}$$

m^2 lugares
para cada uno 2 opciones
0, 1

$\Rightarrow$ son 2^{m^2}

Reflexivos:

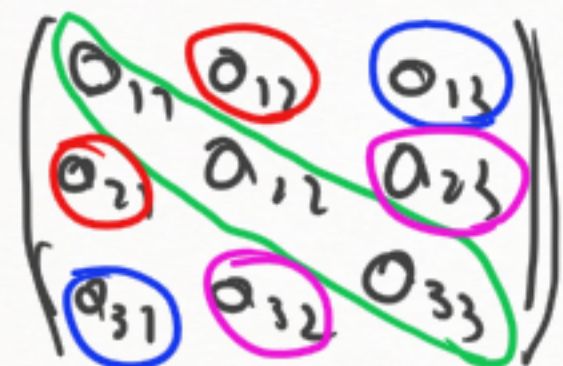
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{m^2-m}{2} \end{pmatrix}$$

los otros $m^2 - m$ pueden ser 0 o 1
 2^{m^2-m}

$$aRb \text{ y } bRa \Rightarrow a=b$$

Antisimétrica

• Pueden ser 0 o 1 2^3



Los otros por los no pueden ser (1, 1, 1)

•	0, 0	1, 0	0, 1	3	} 3^3
•	0, 0	1, 0	0, 1	3	
•	0, 0	1, 0	0, 1	3	

Total $2^3 \times 3^3$

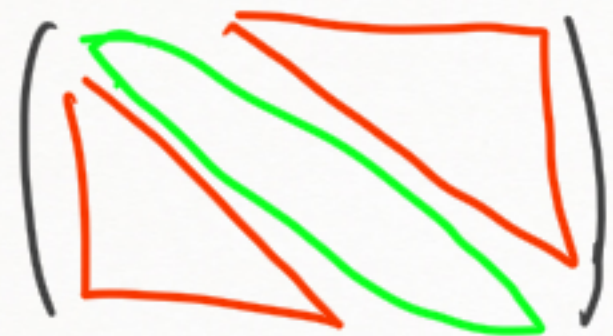
$M^2 =$  $+ 2 \times$ 

$M^2 = m + 2 \times$ 



• divigi 2^m
resto: $3^{\frac{m^2-m}{2}}$

total $2^m \times 3^{\frac{m^2-m}{2}}$



Sin etra $\triangle$ y ∇ son simétricos

El triángulo inferior está determinado por el superior.

Elegir diag 2^m

Elegir triáng. sup. $2^{\frac{m^2-m}{2}}$

$$\Rightarrow 2^m 2^{\frac{m^2-m}{2}} = 2^{\frac{m^2-m}{2} + m} = 2^{\frac{m^2+m}{2}}$$