

Relaciones de equivalencia

R relación de equivalencia $\Leftrightarrow \begin{cases} \rightarrow R \text{ reflexiva} \\ \rightarrow R \text{ simétrica} \\ \rightarrow R \text{ transitiva} \end{cases}$

⑦ $R \equiv$ es una relación entre números enteros $\mathbb{Z}$. m fijo

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b = m \quad (a - b \text{ es múltiplo de } m)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a - b = km$$

• $\equiv$ reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \equiv a$

• Sea $a \in \mathbb{Z}$ genérico

$$\underline{a \equiv a} \Leftrightarrow a - a = m$$

$$\Leftrightarrow 0 = m \quad \checkmark$$

Porque $0 = 0 \times m$

• $\equiv$ simétrica: $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$

• Asumir $a \equiv b$ y usando eso probar $b \equiv a$

$$\text{sabemos } a \equiv b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a - b = km$$

$$\Rightarrow a - b = km \Rightarrow b - a = (-k) \times m$$

multiplicamos
ambos lados por
-1

$$\Rightarrow b - a = m$$

$$\Rightarrow b \equiv a$$

• $\equiv$ transitiva: $a \equiv b$ y $b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

• asumiendo $a \equiv b$ y $b \equiv c$ y queremos probar $a \equiv c$

• $\forall$ asumiendo

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Leftrightarrow a - b = k_1 m \\ b \equiv c &\Leftrightarrow b - c = k_2 m \end{aligned}$$

$$a \equiv c \Leftrightarrow \boxed{a - c = \dot{m}} \quad \text{a probar}$$

$$a - c = a - b + b - c = k_1 m + k_2 m = (k_1 + k_2) m = \dot{m}$$

Como $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva $\Rightarrow$ es de equivalencia

2) $a \equiv b \Leftrightarrow$ a y b tienen el mismo
resto al dividir entre m

$$a = q_1 m + r_1$$

donde $0 \leq r_1 < m$

$$b = q_2 m + r_2$$

donde $0 \leq r_2 < m$

Hay que demostrar $\Rightarrow$
 $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ asumamos $a \equiv b$

y queramos probar que tienen el mismo resto.

$$a \equiv b \Leftrightarrow \underline{a - b = km}$$

$$a - b = q_1 m + r_1 - (q_2 m + r_2)$$

$$= \underline{(q_1 - q_2)m + r_1 - r_2}$$

$$\Rightarrow (q_1 - q_2)m + r_1 - r_2 = km$$

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = (k - q_1 + q_2)m = m$$

$\Rightarrow$ sea, $r_1 - r_2$ es múltiplo de m .

$$\Rightarrow r_1 - r_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$$

Porque $r_1 - r_2 \leq r_1 < m \Rightarrow r_1 - r_2 < m$

$$\text{y } r_1 - r_2 \geq -r_2 > -m \Rightarrow r_1 - r_2 > -m$$

$r_1 - r_2$ es múltiplo de m y $-m < r_1 - r_2 < m$
el único múltiplo de m entre $-m$ y m es 0

$$t_1 - t_2 \leq t_1 < m \quad \text{def de resto}$$

$t_2 \geq 0$
 resto algo ≥ 0

$$t_1 - t_2 \geq -t_2 > -m$$

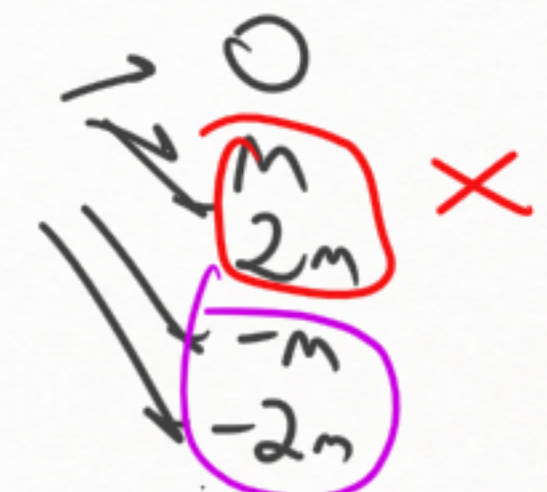
$t_1 \geq 0$
 sumando algo ≥ 0

def de
 resto

$$\Rightarrow -m < t_1 - t_2 < m$$

Por otra parte $t_1 - t_2 = m$

posib son $t_1 - t_2 =$



$$\Rightarrow t_1 - t_2 = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2$$

$(\Leftarrow)$ asumamos que $t_1 = t_2$ y queramos probar $a \doteq b$ $a - b = n$

$$a - b = g_1 m + t_1 - (g_2 m + t_2) = (g_1 - g_2)m + \underbrace{t_1 - t_2}_0 = (g_1 - g_2)m = n$$

En vez de usar $\mathbb{Z}$, voy a usar $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $y \quad m=2$
 $a \equiv b \Leftrightarrow a - b = 2$

$$C_1 = \{1, 3, 5\} \quad C_2 = \{2, 4, 6\}$$

Clases de equivalencia

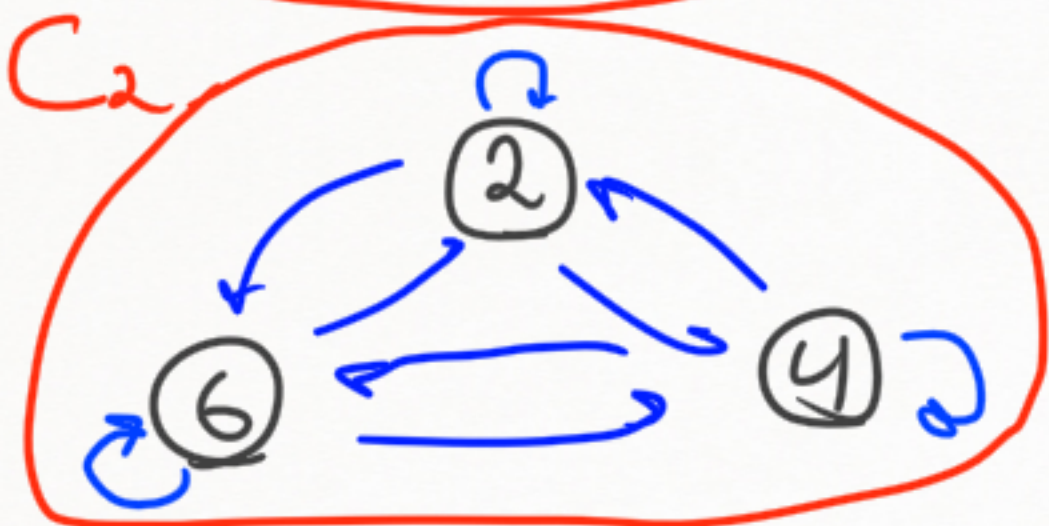
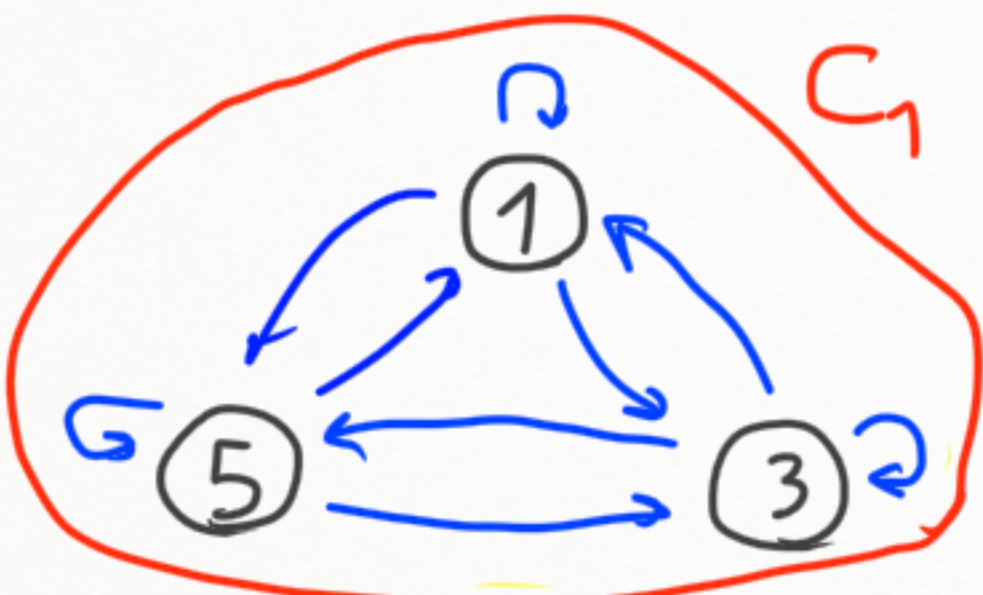
- Dentro de cada clase, todos están relacionados con todos $\forall x, y \in C_1 \quad x R y$; $\forall x, y \in C_2 \quad x R y$

- Entre clases distintas no hay relaciones.
 $\forall x \in C_1, \forall y \in C_2 \quad x R y \text{ y } R x$

Conjunto cociente: conjunto de las clases de equivalencia

$$A/\equiv = \{C_1, C_2\} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$$

Obs: $A/\equiv$ es un conjunto de conjuntos tiene 2 elementos $\begin{matrix} \{1, 3, 5\} \\ \{2, 4, 6\} \end{matrix}$ $1 \notin A/\equiv$



$[a]$: clase de equivalencia de a
(La única clase de eq a la que $a \in$)

$$[1] = \{1, 3, 5\} = [3] = [5]$$

$$[2] = \{2, 4, 6\} = [4] = [6]$$

(c) $n=1$ $a \equiv b \Leftrightarrow a-b = i \Leftrightarrow \exists k / a-b = k \times 1$
se cumple con $k = a-b$

$\Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b \Rightarrow$ Hay una única clase de eq. que es todo $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{\mathbb{Z}\} = \{[0]\} = \{[n]\} \quad \forall n \quad [n] = \mathbb{Z}$$

Hay una sola clase $C = \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/\equiv = \{C\} \quad \{\mathbb{Z}\} = \{\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}\}$$

$$n = 2$$

Por parte b $a \equiv b \Leftrightarrow$ a y b tienen mismo resto al dividir entre 2.

$\nearrow$ a y b son impares
 $\searrow$ a y b son pares

$$C_1 = \{a \in \mathbb{Z} / a \text{ es impar}\}$$

$$C_2 = \{a \in \mathbb{Z} / a \text{ es par}\}$$



$$\mathbb{Z} / \equiv = \{C_1, C_2\}$$

$$= \{ \{a \in \mathbb{Z} / a \text{ es impar}\}, \{a \in \mathbb{Z} / a \text{ es par}\} \}$$

El conjunto cociente tiene 2 elementos

$a \equiv b \iff \textcircled{d} \quad m$ tiene igual resto al dividirse entre m

$\swarrow$ resto 0 $\leftarrow C_0$
 $\swarrow$ resto 1 $\leftarrow C_1$
 $\swarrow$ resto 2 $\leftarrow C_2$
 $\vdots$
 $\swarrow$ resto $m-1 \leftarrow C_{m-1}$

$\mathbb{Z}/\equiv = \{C_0, C_1, \dots, C_{m-1}\}$
 m elementos (c/u conjunto infinito)

$$a = qm + r$$

$$0 \leq r < m$$

$$\begin{array}{cc}
 8 & 7 \\
 \textcircled{1} & \cup \\
 \textcircled{1} & \cup \\
 4 & 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cc}
 6 & 5 \\
 \cup & \cup \\
 \cup & \cup \\
 2 & 1
 \end{array}$$