7 FG de formas de obtener n como suma de tiradas de un dado (cualquier cantidad de tiradas)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n = \text{cantidad de formas de obtener } n \text{ como suma de tiradas de un dado}$$

$$f(x) = \underbrace{a_0}_{\text{Formas de que sumen } 0} + \underbrace{a_1 x}_{\text{Formas de que sumen } 1} + \underbrace{a_2 x^2}_{\text{Formas de que sumen } 2} + \cdots$$

$$f(x) = (1 - x - x^2 \cdots - x^6)^{-1} = \frac{1}{1 - (\underbrace{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}_{y})} = \frac{1}{1-y}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x + x^2 + \cdots + x^6)^n$$

¿qué es eso?

cantidad de formas de obtener m con 1 sola tirada de dado

a_m = # formas de obtener m con 1 tirada de un dado.

$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad \cdots \quad a_6 = 1 \quad a_7 = 0 \quad a_8 = 0 \quad \cdots$

$f(x) = 0 + 1 \times x + 1 \times x^2 + \cdots + 1 \times x^6 + 0 \times x^7 + 0 \times x^8 \cdots = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$

$\Rightarrow (x + x^2 + \cdots + x^6)^1$ FG de suma de tirar una vez el dado.

---

el dado se tira 2 veces

$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$

$m = 4$:
- $(1, 3)$
- $(2, 2)$
- $(3, 1)$

$a_4 = 3$

En el desarrollo, x^4 aparece sumado 3 veces

$x \times x^3 \quad x^2 \times x^2 \quad x^3 \times x$

$\Rightarrow$ el coeficiente de x^4 es 3

$$(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3) = x\cdot x + x\cdot x^2 + x\cdot x^3 + x^2\cdot x + x^2 * x^2 + x^2\cdot x^3 + x^3\cdot x + x^3\cdot x^2 + x^3\cdot x^3$$

$$f(x) = (\underbrace{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6}_{x^i})(\underbrace{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6}_{x^j})$$

$m = i + j$

$1 \leq i, j \leq 6$

1^{er} dado sale i

2^{do} sale j

$\Rightarrow$ Cuando multiplicamos $x^i x^j$ aporta 1 al coeficiente de x^m

$\Rightarrow$ a_m coeficiente de x^m es la cantidad de formas de obtener m como la suma de dos tiradas de un dado

$f(x) = (x+x^2+\dots+x^6)^2$ FG de suma de tirar 2 veces un dado.

Si tenemos k tiradas de un dado

$$f(x) = (x + x^2 + \dots + x^6)^k$$

$$\underset{1}{(x + x^2 + \dots + x^6)}\underset{2}{(x + \dots + x^6)} \cdots \underset{k}{(x + \dots + x^6)}$$

x^{d_1} x^{d_2} x^{d_k}

$m = d_1 + d_2 + \dots + d_k$ d_1: 1^er^ dado d_2: 2^do^ dado ... d_k: k^mo^ dado

$$1 \leq d_i \leq 6$$

En el desarrollo de $f(x)$ aparece $x^{d_1} \times x^{d_2} \times \dots \times x^{d_k}$ y suma 1 al coeficiente de x^m, o sea a a_m.

Eso para cada $d_1, \dots, d_k$ tq $m = d_1 + d_2 + \dots + d_k$ y $1 \leq d_i \leq 6$

a_m = Formas de obtener m como suma de cualquier cantidad de tirados de un dado

obtener m como suma de cualquier cantidad de tirados de dado

regla de la suma

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \text{obtener } m \text{ como suma de } k \text{ tirados}$$

estuvimos viendo

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\overbrace{x + x^2 + \cdots + x^6}^{y})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-(x+x^2+\cdots+x^6)}$$

$$= (1 - x - x^2 \cdots - x^6)^{-1}$$

obtener m como suma de k tirados : $f(x) = (x + x^2 + \cdots + x^6)^k$

Ejemplo de como pasar de ecuación entera a FG
basado en OF2013 V11

$$\boxed{}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \boxed{7}$$

$2 \leq x_1 \leq 7$

$0 \leq x_2 \leq 3$

$1 \leq x_3 \leq 2$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1$

$$\overbrace{(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)}^{x_1 \quad g(x)} \overbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}^{x_2} \overbrace{(x + x^2)}^{x_3}$$

La cant de sols de $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, $2 \leq x_1 \leq 7$, $0 \leq x_2 \leq 3$, $1 \leq x_3 \leq 2$ es el coef. de x^7

$$\boxed{d_1} + d_2 + \dots + d_k = \boxed{m}$$

$1 \leq d_i \leq 6$

$$\overbrace{(x + x^2 + \dots + x^6)}^{d_1} \overbrace{(x + x^2 + \dots + x^6)}^{d_2} \cdots \overbrace{(x + \dots + x^6)}^{d_k}$$

$$= (x + x^2 + \dots + x^6)^k$$

la cant. de sols es el coef de x^m

Qm: cant formas de que un cajero de n pesos
billetes de 100, 200, 500, 1000

$$\boxed{100 \cdot x_1 + 200 x_2 + 500 x_3 + 1000 x_4 = n} \qquad 0 \le x_i$$

x_1: cant de billetes de 100, x_2: 200 x_3: 500 x_4: 1000

$n = 2000$

- $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ $x_3 = 1$ $x_4 = 1$
- $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ $x_3 = 3$ $x_4 = 0$

x^{500}

$$\overbrace{(1 + x^{100} + x^{200} + x^{300} + \cdots)}^{x_1} \overbrace{(1 + x^{200} + x^{400} + \cdots)}^{x_2}$$
$$\underbrace{(1 + x^{500} + x^{1000} + x^{1500} + \cdots)}_{x_3} \underbrace{(1 + x^{1000} + x^{2000} + x^{3000} + \cdots)}_{x^4}$$

el coef de x^n es la cant de formas en que el cajero puede dar n pesos

x^{2000} $\quad x^{100} \cdot x^{400} \cdot x^{500} \cdot x^{1000} = x^{2000}$

$x^{500} \cdot 1 \cdot x^{1500} \cdot 1 = x^{2000}$

$$f(x) = \underbrace{(1 + x^{100} + x^{200} + \cdots)}(1 + x^{200} + x^{400} + \cdots)(1 + x^{500} + x^{1000} + \cdots)(1 + x^{1000} + x^{2000} + \cdots)$$

- $$1 + \underbrace{x^{100}}_{y} + (x^{100})^2 + (x^{100})^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-x^{100}}$$

$$((a^b)^c = a^{bc})$$

Podemos hacer lo mismo con los otros y queda

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{1-x^{100}} \times \frac{1}{1-x^{200}} \times \frac{1}{1-x^{500}} \times \frac{1}{1-x^{1000}}}$$

Ejmplo

$x_1 + x_2 = n$

$0 \leq x_1$

x_2 es par

$$\overbrace{(1+x+x^2+x^3+\cdots)}^{x_1}\overbrace{(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)}^{x_2}$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$

x_1 múltiplo de 100

x_2 múltiplo de 200

x_3 múlt de 500

x_4 múlt de 1000

$(1+x^{100}+x^{200}+x^{300}+\cdots)(1+x^{200}+x^{400}+\cdots$ etc

$$a_n = (-1)^n \qquad b_n = (-1)^n$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1)(-1)^n$$

$c_n : 1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$

$f(x)$ Fg a_n $\qquad$ $g(x)$ Fg b_n $\qquad \Rightarrow f(x)g(x)$ Fg c_n

$f(x) = 1 + x + x^2 - x^3 + x^4$

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + \cdots)$

$g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

$$1+x+x^2+x^3+x^4 \mid \frac{1}{1-x} = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{S_n^0} + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{S_n^1} + \underbrace{\frac{x^2}{1-x}}_{S_n^2} + \underbrace{\frac{x^3}{1-x}}_{S_n^3} + \underbrace{\frac{x^4}{1-x}}_{S_n^4}$$

$$S_n^0 \quad 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$$

$$S_n^1 \quad 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$$

$$S_n^2 \quad 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$$

$$S_n^3 \quad 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$$

$$S_n^4 \quad 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1$$

$$c_n \quad 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5$$