$\boxed{\text{Resolver recurrencias}}$

Hallar la recurrencia asociada a cierto problema de conteo.

Resolución de recurrencias de tipo $c_1 a_{n+2} + c_2 a_{n+1} + c_3 a_n = f(n)$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 1$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad a_0 = 1 \quad a_1 = 3$$

Buscamos soluciones a la recurrencia de forma "$\lambda^n = a_n$" $\lambda \neq 0$

Aplicando la recurrencia: $\lambda^{n+2} - 5\lambda^{n+1} + 6\lambda^n = 0$

sacamos λ^n de factor común: $\lambda^n(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \quad \forall n \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \text{ Polinomio característico}$$

si λ es raíz $\Rightarrow$ λ^n resuelve la recurrencia (sin mirar las condiciones iniciales)

$$\frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$$

$\Rightarrow$ Tanto $a_n = 2^n$ como $a_n = 3^n$ cumplen la recurrencia (sin contar las condiciones de borde)

$\boxed{2^n}$:

$$2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot 2^n = 2^n(2^2 - 5 \cdot 2 + 6) = 2^n \cdot (4 - 10 + 6) = 0$$

idem con 3^n

Hasta ahora encontramos 2 soluciones $\neq$:

una es $a_n = 2^n$, otra es $a_n = 3^n$

$\Longrightarrow \boxed{a_n = c_1 2^n + c_2 3^n}$ (multiplicar c/u por una cte y los sumamos)

Esta nueva a_n tb es una solución $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

$$\underbrace{c_1 2^{n+2} + c_2 3^{n+2}}_{a_{n+2}} - 5(\underbrace{c_1 2^{n+1} + c_2 3^{n+1}}_{a_{n+1}}) + 6(\underbrace{c_1 2^n + c_2 3^n}_{a_n})$$

$$= c_1 2^{n+2} - 5 c_1 2^{n+1} + 6 c_1 2^n + c_2 3^{n+2} - 5 c_2 3^{n+1} + 6 c_2 3^n$$

$$= c_1 2^n (\underbrace{2^2 - 5\cdot 2 + 6}_{=0}) + c_2 3^n (\underbrace{3^2 - 5\cdot 3 + 6}_{=0}) = 0$$

$$\boxed{a_n = c_1 2^n + c_2 3^n}$$

solución general de

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

Hasta ahora vengo ignorando las condiciones de borde $a_0 = 1$ $a_1 = 3$

$\Longrightarrow$ Vamos a definir c_1 y c_2 para que se cumpla

$$\left.\begin{array}{lll} a_0 = 1 & \Longrightarrow & a_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = 3 & \Longrightarrow & a_1 = c_1 2 + c_2 3 = 3 \end{array}\right| \xRightarrow{\text{resolver}} \boxed{c_1 = 0 \quad c_2 = 1}$$

La solución de $\begin{cases} a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \\ a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \end{cases}$ es $a_n = 0 \times 2^n + 1 \times 3^n$

$$\boxed{a_n = 3^n}$$

$1 \times a_{n+2} - 4 a_{n+1} + 4 a_n = 0$ $\boxed{\begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{matrix}}$

$a_n = \lambda^n$

$\lambda^{n+2} - 4\lambda^{n+1} + 4\lambda^n = 0$

$\lambda^n \underbrace{(\lambda^2 - 4\lambda + 4)}_{\text{Pol car}} = 0$

Pol característico $1 \times \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$\Rightarrow$ Hay raíz doble $\lambda = 2$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_n = 2^n}$ es solución

$\Rightarrow$ como 2 es raíz doble $\boxed{a_n = n 2^n}$ tb es solución.

En este caso la sol general es $\boxed{a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n}$

Para hallar las constantes $a_0 = 0$ $a_1 = 1$

$a_0 = 0 \Rightarrow c_1 \times 2^0 + c_2 \times 0 \times 2^0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$a_1 = 1 \Rightarrow c_1 \times 2 + c_2 \times 1 \times 2 = 1 \quad 2c_1 + 2c_2 = 1 \Rightarrow 2c_2 = 1 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$

sol $\boxed{a_n = \frac{n 2^n}{2}}$

$$c_1 a_{n+2} + c_2 a_{n+1} + c_3 a_n = 0$$

$$\Longrightarrow \text{Pol car: } c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0$$

$$a_n - 2a_{n-1} = n2^n \qquad a_0 = 1$$

1. Hallar la solución general de la homogenea $a_n - 2a_{n-1} = 0$
2. Hallar una solución particular de $a_n - 2a_{n-1} = n2^n$
3. sumarlas y después hallar las constantes de la homogenea usando las condiciones iniciales.

---

1. sol general de $a_n - 2a_{n-1} = 0$

$a_n = 2a_{n-1}$

sol grdl $\boxed{a_n^H = c2^n}$

Pol car $\lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 2$

2. hallar una solución particular de $a_n - 2a_{n-1} = n2^n$

Hay que probar con una solución candidata que tenga ciertas constantes y hallar las ctes para que sea solución particular.

¿cómo tiene que ser la solución candidata?

(Apuntes pág 7)

$$a_n - 2a_{n-1} = n2^n$$

polinomio de grado 1

$$a_n^P = n2^n(c_1 n + c_2)$$

polinomio de grado 1 genérico

$$\boxed{\frac{2^n}{2^{n-1}} = 2^{n-(n-1)}}$$

n porque 2 es raíz simple del pol car de la homogénea $\lambda - 2$

$a_n^P = n2^n(c_1n+c_2)$ Hallar c_1 y c_2 para que sea solución

$$a_n^P - 2a_{n-1}^P = n2^n \Rightarrow n2^n(c_1n+c_2) - 2(n-1)2^{n-1}(c_1(n-1)+c_2) = n2^n$$

2^{n-1} Factor común

$$= 2^{n-1}\left(2n(c_1n+c_2) - 2(n-1)(c_1(n-1)+c_2)\right) = n2^n$$

paso 2^{n-1} dividiendo

$$= 2n(c_1n+c_2) - 2(n-1)(c_1(n-1)+c_2) = \frac{n2^n}{2^{n-1}} = 2n$$

$$= \cancel{2}n^2c_1 + \cancel{2}nc_2 - \cancel{2}(n-1)^2c_1 - \cancel{2}(n-1)c_2 = \cancel{2}n$$

$$= \cancel{n^2c_1} + \cancel{nc_2} - \cancel{n^2c_1} + 2nc_1 - c_1 - \cancel{nc_2} + c_2 = n$$

$$2nc_1 - c_1 + c_2 = n$$

$$2nc_1 - c_1 + c_2 = n$$

$$2c_1 n + c_2 - c_1 = 1n + 0$$

$$2c_1 = 1$$

$$c_2 - c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = 1/2 \\ c_2 = 1/2 \end{array}}$$

$$a_n^P = n2^n\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{n2^n(n+1)}{2}$$

3

$$a_n = a_n^H + a_n^P = c2^n + \frac{n2^n(n+1)}{2}$$

Hallar c usando $a_0 = 1$

$$a_0 = c2^0 + \frac{0\cdot 2^0\cdot 1}{2} = \boxed{c = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = c2^n + \frac{n2^n(n+1)}{2}}$$

Habría que verificar para ver si hicimos bien las cuentas

$$a_n - 2a_{n-1} = n2^n$$

$$a_0 = 1$$

④ $a_n = -a_{n-1} - b_n \qquad a_0 = 0$

$b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \qquad b_0 = 2 \quad b_1 = 1$

sumar las eci $\quad a_n + b_{n+1} = -a_{n-1} - 3a_{n-1}$

$\Rightarrow b_{n+1} = -a_n - 4a_{n-1} \quad \Rightarrow \boxed{b_n = -a_{n-1} - 4a_{n-2}}$

$a_n = -a_{n-1} - b_n = -a_{n-1} - (-a_{n-1} - 4a_{n-2}) = 4a_{n-2}$

$\Rightarrow a_n = 4a_{n-2} \quad a_0 = 0 \quad a_1 = -1$

$a_n = -a_{n-1} - b_n \Rightarrow a_1 = -a_0 - b_1 = -1$

$$n a_n - (n-1) a_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} = \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{n-2}{\cancel{n-1}} a_{n-2}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{a_1}{2} = \frac{a_1}{3}$$

$$a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{3}{4} \frac{a_1}{3} = \frac{a_1}{4} \qquad a_4 = \frac{3}{4} a_3 = \frac{3}{4} \frac{2}{3} a_2 = \frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2} a_1 = \frac{a_1}{4}$$

$$\boxed{a_n = \frac{a_1}{n}}$$ Inducción