

Va a haber que inscribirse a los parciales
en la página bedelias.udelar.edu.uy
Mirar Foro de novedades.

Sucesiones a_n $n \in \mathbb{N}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Recurrencias: $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$, $a_n + a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, etc

Objetivo: Dada una recurrencia, encontrar la sucesión a_n que lo cumple.

Analogía

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Es una ecuación cuya solución son números $x \in \mathbb{R}$

$\forall n \geq 1$

$$a_n - 2a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 1$$

Es una recurrencia cuya solución es una sucesión a_n $n \in \mathbb{N}$

Si queremos ver algunos valores:

$$a_0 = 1$$

$$¿a_1? \quad a_n - 2a_{n-1} = 0 \stackrel{n=1}{\Rightarrow} a_1 - 2a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 2a_0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$¿a_2? \quad a_n - 2a_{n-1} = 0 \stackrel{n=2}{\Rightarrow} a_2 - 2a_1 = 0$$
$$\Rightarrow a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \forall n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 2a_0 = 2 \quad a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4 \quad a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$\underset{2^0}{1} \quad \underset{2^1}{2} \quad \underset{2^2}{4} \quad \underset{2^3}{8}$

Para n cualquier, $a_n = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ vamos a probarlo por inducción

$$P(n) := a_n = 2^n$$

(PB) $P(0)$

$P(0): a_0 = 2^0 = 1$

PI) $a_{n-1} = 2^{n-1} \quad a_n = 2^n \quad n \geq 1$

Der

$$a_n \stackrel{H}{=} 2a_{n-1} \stackrel{H}{=} 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{1+n-1} = 2^n \quad \square$$

$\Rightarrow$ Por IC probamos que $a_n = 2^n \quad \forall n$

la solución a la recurrencia es la sucesión $a_n = 2^n$

Ejercicio: Análogamente, la sol de $a_n = b \cdot a_{n-1}, \quad a_0 = c$ es $a_n = c b^n$

Resolver una recurrencia

Dado un problema de conteo, traducirlo a una **recurrencia** hoy

a_m : la cantidad de saludos entre m personas si c/u saluda al resto.

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad \dots$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{matrix}$$

$$a_{m+1} = a_m + m$$

a_{m+1} : saludos entre todos

a_m : saludos entre los primeros m

saludos entre los primeros m

los saludos del último ($m+1$) con los otros m

$$a_1 = a_0 + 0 = 0 + 0 = 0$$

$$a_2 = a_1 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Recurrencia: $\begin{cases} a_{m+1} = a_m + m & \forall m \geq 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

$$a_{n+1} = a_n + n \quad a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \text{¿} a_1? \quad a_{n+1} &= a_n + n \quad \xRightarrow{n=0} a_1 = a_0 + 0 = 0 + 0 = 0 \\ \text{¿} a_2? \quad a_{n+1} &= a_n + n \quad \xRightarrow{n=1} a_2 = a_1 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Ya resolvimos el Ej 3 parte (a). Sol: $a_{n+1} = a_n + n \quad a_0 = 0$
 El ejercicio no nos pide resolver la recurrencia

$$\text{Spoiler: } a_n = \frac{n(n-1)}{2} = C_2^n$$

$a_n =$ cont secuencias de 0's & 1's en las que no hay 2 ceros seguidos
 de largo n

$a_1 = 2$ $[0]$ $[1]$
 $a_2 = 3$ $[01]$ $[10]$ $[11]$ ~~$[00]$~~

(por def es a_n)
 cualquier secuencia de n 0's 1
 sin 2 ceros consecutivos

$\overline{1}$ $\overline{2}$... $\overline{n}$ $\overline{n+1}$

separar en 2 casos

(Caso 1)

En los lugares $1 \dots n$
 podemos poner cualquier
 secuencia de 0,1
 que no tenga dos
 ceros consecutivos

a_n

$\overline{1}$ $\overline{2}$... $\overline{n}$ $\overline{n+1}$
 en el lugar $n+1$
 hay un 1

$\overline{1}$ $\overline{2}$... $\overline{n}$ $\overline{n+1}$

a_n : cont. secuencias de 0,1 sin dos 0 seguidos

$a_1 = 2$
(Caso 2)

$a_2 = 3$. . .

$\overbrace{1 \quad 2 \quad \dots \quad n} \quad \overbrace{0}$

0 en el lugar $n+1$

no podemos poner a_n , porque pueden terminar en 0

$\Rightarrow$ En el lugar n tiene que haber un 1 (sino entre el n y el $n+1$ hay dos ceros consecutivos)

$\overbrace{1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1} \quad \overbrace{1} \quad \overbrace{0}$

cualquiera de las secuencias
sin 2 ceros consecutivos
de largo $n-1 \Rightarrow a_{n-1}$

Hay que sumar los dos casos

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

(Caso 1) (Caso 2)

recurrencia

recurriendo $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 3$$

la solución a esa recurrencia es una sucesión a_n $n \in \mathbb{N}$
de hecho es la sucesión de Fibonacci

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 5$$

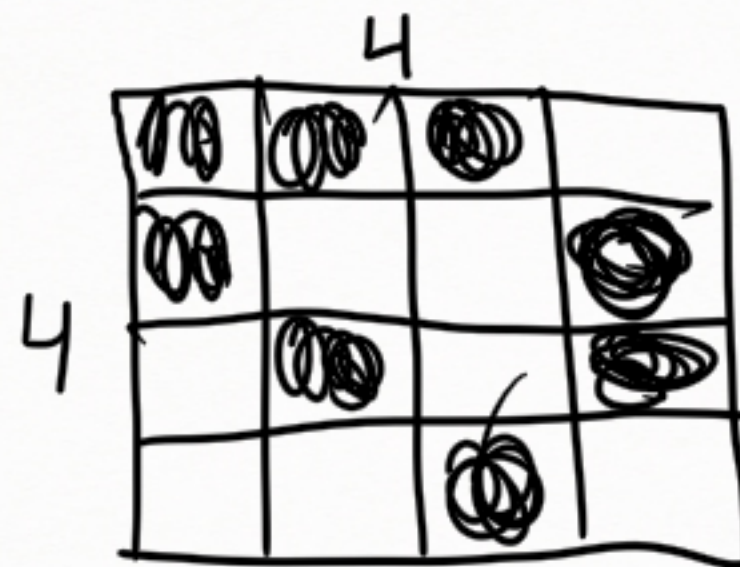
$$a_4 = 5 + 3 = 8$$

$$a_5 = 8 + 5 = 13$$

⋮

$$a_{m+1} = \frac{3}{2} a_m$$

$$a_m = \frac{3^m}{2^m} a_0 \underset{=L}{=} \frac{3^m}{2^m} \cdot L$$



$$m > 4$$

Si cada columna tiene 2 de cada color, la única forma de que haya un rect es que dos columnas sean iguales.

Cont. de columnas $\neq$ con 2 de cada color $C_2^4 = 6$ nidas



Todo esto pensando
que en cada columna
hay 2 de cada
color

m colores

Pueden haber columnas con 4 del mismo color o 3, pero en esos casos podés poner menos columnas

4

	3		
1	2		
2			
3			
4			

$$a_n + 6a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$$

$$r^2 + 6r - 6 = 0$$

$$r = 3, 2$$

$$a_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n$$

$$a_0 = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$a_1 = 3 = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$$

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

$$0 \leq x_2 \leq 6$$

$$3 \leq x_3 \leq 7$$

$$0$$

$$4$$

$$0 \leq x_4 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

$$CR_n^4$$

$$0 \leq x_i \quad i=1, \dots, 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$$

$$0 \leq x_i \quad \dots$$

$$\lceil m \rceil = m$$

$$\lceil 1.1 \rceil = 1$$

$$\lceil 2.5 \rceil = 2$$