Resolver recurrencias

Dado un problema de conteo, traducirlo a una recurrencia

$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ $\qquad a_1 = 4 \qquad a_2 = 12$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \quad a_1 = 4 \quad a_2 = 12$$

Recurrencia homogénea

Buscamos soluciones de la forma $a_n = \lambda^n$ $\lambda \neq 0$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \iff \lambda^{n+2} - 2\lambda^{n+1} - 3\lambda^n = 0 \iff$$

$$\lambda^n(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

$$\iff \boxed{\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0}$$ Polinomio característico

$a_n = \lambda^n$ es solución de $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a_n = 3^n$ y $a_n = (-1)^n$ son soluciones de la recurrencia.

Consideramos ahora:

$a_n = c_1 3^n + c_2 (-1)^n$ A c/u de las soluciones anteriores las multipliqué por una cte y las sumé

$\Rightarrow a_n = c_1 3^n + c_2 (-1)^n$ es solución $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$

$\underbrace{c_1 3^{n+2} + c_2 (-1)^{n+2}}_{a_{n+2}} - 2\left(\underbrace{c_1 3^{n+1} + c_2 (-1)^{n+1}}_{a_{n+1}}\right) - 3\left(\underbrace{c_1 3^n + c_2 (-1)^n}_{a_n}\right)$

$= c_1 3^{n+2} - 2c_1 3^{n+1} - 3c_1 3^n + c_2 (-1)^{n+2} - 2c_2 (-1)^{n+1} - 3c_2 (-1)^n$

$= c_1 3^n \left(\underbrace{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}_{=0}\right) + c_2 (-1)^n \left(\underbrace{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3}_{=0}\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_n = c_1 3^n + c_2 (-1)^n \text{ cumple } a_{n+2} - 2 a_{n+1} - 3a_n = 0 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

Para cualquier $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $a_n = c_1 3^n + c_2 (-1)^n$ cumple $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 0$

$\longrightarrow$ Falta que se cumplan las condiciones iniciales $a_1 = 4$ $a_2 = 12$

Eligiendo los valores de c_1 y c_2 vamos a llegar a una sol. que cumpla la recurrencia y las cond. iniciales.

$$a_1 = c_1 3^1 + c_2 (-1)^1 = 4$$
$$a_2 = c_1 3^2 + c_2 (-1)^2 = 12$$
$$\iff \begin{cases} 3c_1 - c_2 = 4 \\ 9c_1 + c_2 = 12 \end{cases}$$

+ las ec.: $12 c_1 = 16 \Rightarrow \boxed{c_1 = 4/3}$ $\quad \cancel{3} \times \frac{4}{\cancel{3}} - c_2 = 4$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{4}{3} \times 3^n = 4 \times 3^{n-1}$$

$$\boxed{a_n = 4 \times 3^{n-1}}$$

Llegamos a $a_n = 4 \times 3^{n-1}$ Verificar

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 4 \times 3^{n+1} - 2 \times 4 \times 3^n - 3 \times 4 \times 3^{n-1}$$

$$= 4 \times 3^{n-1} (3^2 - 2 \times 3 - 3) = 0$$

$a_1 = 4 \times 3^0 = 4$ ✓

$a_2 = 4 \times 3^1 = 12$ ✓

$\Longrightarrow$ Está bien.

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 5n+3 \qquad \left.\begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{matrix}\right\}$$ los agrego

No homogeneo

(1) Hallar la sol. general de la homogenea $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ sin determinar las ctes c_1 y c_2

(2) Hallar una solución particular de $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 5n+3$

(3) Sumarlas y determinar c_1 y c_2 mediante las condiciones ini.

$\boxed{1}$ $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \xrightarrow{\text{Pol. carac}} \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ raiz doble 1

$a_n = 1^n = 1$ es solución ¿y la otra? $a_n = n\,1^n = n$

$\Rightarrow$ sol general de la homogenea es $\boxed{a_n = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot n}$

---

verif: $a_n = n \qquad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n+2 - 2(n+1) + n = n+2-2n-2+n = 0$

Si diera raíz doble r la sol general sería $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$

Conclusión $\boxed{1}$ sol grl de la homogenea es $\boxed{a_n = c_1 + c_2 n}$

$\boxed{2}$ Hallar una sol. de $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1^n \underbrace{(5n+3)}$ (cualquiera) ← Polinomio de orden 1

Buscamos soluciones de forma $\boxed{a_n = n^2(b_1 n + b_2)}$ ← Hallar b_1 y b_2 para que eso sea solución

1 es raíz doble del polinomio característico

Según la forma del $f(n)$ (en este caso $f(n) = 5n+3 = 1^n(5n+3)$) es la forma de la solución particular que se busca.

$f(n) = r^n \times$ "polinomio" $\Rightarrow$ hay que ver si r es raíz simple o doble del pol carac.

$1^n \times (5n+3)$

$$a_n = n^2 \times (b_1 n + b_2)$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 5n+3$$

$$(n+2)^2 \left(b_1(n+2) + b_2\right) - 2(n+1)^2 \left(b_1(n+1) + b_2\right) + n^2 (b_1 n + b_2) = 5n+3$$

$$=$$

$$(n^2+4n+4)(b_1 n + 2b_1 + b_2) - 2(n^2+2n+1)(b_1 n + b_1 + b_2) + n^2(b_1 n + b_2)$$

$$\cancel{b_1 n^3} + n^2(2b_1 + b_2) + 4b_1 n^2 + 4n(2b_1 + b_2) + 4b_1 n + 8b_1 + 4b_2$$

$$\cancel{-2b_1 n^3} - 2n^2(b_1 + b_2) - 4n^2 b_1 - 4n(b_1 + b_2) - 2b_1 - 2b_2 + \cancel{n^3 b_1} + n^2 b_2$$

$$= n^2(\cancel{2b_1} + \cancel{b_2} + \cancel{4b_1} \cancel{-2b_1} \cancel{-2b_2} \cancel{-4b_1} + \cancel{b_2}) + n(8b_1 + 4b_2 + 4b_1)$$

$$+ 8b_1 + 4b_2 - 4b_1 - 4b_2$$

$$(12b_1 + 4b_2)n + 4b_1 = 5n + 3$$

$$\begin{cases} 12b_1 + 4b_2 = 5 & \to b_2 = -1 \\ 4b_1 = 3 & \to b_1 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a_n^p = n^2\left(\frac{3}{4}n - 1\right) \quad \text{(salvo errores de cuenta)}$$

3

$$a_n = a_n^H + a_n^p = c_1 + c_2 n + n^2\left(\frac{3}{4}n - 1\right)$$

Con las condiciones iniciales se hallan c_1, c_2

$\cancel{a_n = \alpha}$

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 5 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 17$$

$$\overset{1}{a_2} + \alpha \overset{5}{a_1} + \beta \overset{1}{a_0} = 4$$

$$\overset{17}{a_3} + \alpha \overset{1}{a_2} + \beta \overset{5}{a_1} = 8$$

$2k$ equipos $\leftarrow a_k$

Fijamos un equipo. Uno de los $2k$.

Etapa 1: Elegir el contrincante de ese equipo $2k-1$

Etapa 2: Elegir el resto de la fecha. Hay $2(k-1)$ equipos $\Rightarrow a_{k-1}$

$$a_k = (2k-1)\,a_{k-1}$$