

Recurrencias: Ej $\forall n \geq 0$ $a_{n+1} - 2a_n = 0$, $a_0 = 1$

¿Qué es la solución de una recurrencia? Es una sucesión a_n $n \in \mathbb{N}$

$a_0 = 1$ ¿ a_1 ? ¿ a_2 ? ... ¿ a_n ? ...

¿ a_1 ? por la recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 0 \xrightarrow{n=0} a_1 - 2a_0 = 0 \Rightarrow a_1 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$

¿ a_2 ? $a_{n+1} = 2a_n \xrightarrow{n=1} a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4 = 2^2$

¿ a_3 ? $a_{n+1} = 2a_n \xrightarrow{n=2} a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$

Vamos a probar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N} a_n = 2^n$

La solución de la recurrencia es la sucesión $a_n = 2^n \forall n \in \mathbb{N}$

Prueba por inducción de que $\forall n \in \mathbb{N} a_n = 2^n$

(PB)

$$[a_0 = 2^0 = 1]$$

✓

(PI)

$$[H] a_n = 2^n$$

$$[I] a_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$a_{n+1} \stackrel{[H]}{=} 2a_n \stackrel{[H]}{=} 2 \times 2^n = 2^{1+n} = 2^{n+1} \quad \square$$

Ej: Análogamente, para $\begin{cases} a_{m+1} = b \cdot a_m \\ a_0 = c \end{cases}$

la solución es $a_m = c b^m$

En programación, Dado un cierto algoritmo
 a_m : la cantidad de pasos que realiza el algoritmo con
un entrada (input) de tamaño m .

Programa 1 $a_m = 2m$

Programa 2 $a_m = 2^m$

$m = 40$

Programa 1 termina en $2 \cdot 40 = 80$ pasos

Programa 2 termina en $2^{40} \approx 1000000000000000$ de pasos...

- Dada una recurrence, resolverla
 (hallar la sucesión $a_n \forall n$)
- Dado un cierto problema de conteo, traducirlo a una recurrence Hoy

Problema de conteo

Cantidad de palabras de largo n formadas con las letras A y B (cualquiera cantidad)

a_n

Recurrence cuya solución sea la respuesta al problema de conteo.

$$a_1 = 2 \quad A \quad B$$

$$a_{n+1} = a_n \times 2$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

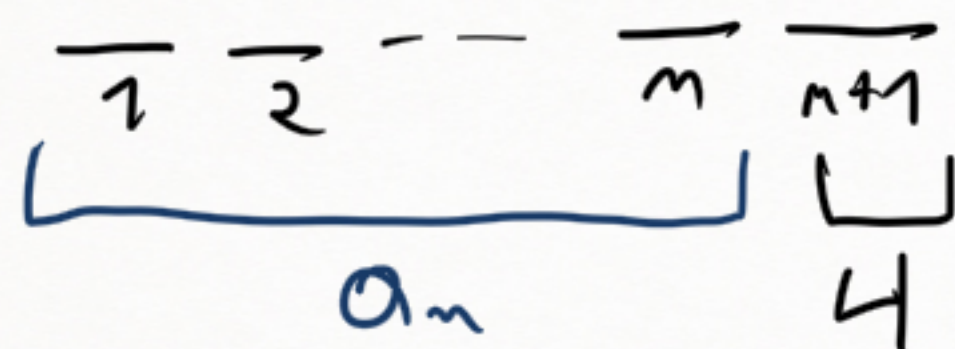
recurrence

$$\overline{1} \quad \overline{2} \quad \dots \quad \overline{n} \quad \overline{n+1}$$

a_n

$2 (A \circ B)$

a) 4 colores no hay ⁵ restricciones. $a_n =$ cantidad de banderas con n franjas



$$a_{n+1} = a_n \times 4$$

2 etapas $\begin{cases} \rightarrow \text{pintar las primeras } n \text{ franjas} & a_n \\ \rightarrow \text{pintar la última franja} & 4 \end{cases}$

$$a_1 = 4$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{sol } a_n = 4^n$$

a_n : cont. de banderos de n franjas sin
dos franjas juntos del mismo color.



$$a_{n+1} = a_n \times 3$$

2 etapas $\rightarrow$ pintar los primeros n a_n

$\searrow$ pintar la $n+1$

3 (no se puede repetir el color de la Franja n)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_1 = 4 \end{cases}$$

(sol: $a_n = 4 \times 3^{n-1}$)

$\swarrow$ demostrar por inducción

$$a_2 = 3 \times a_1 = 3 \times 4 = 4 \times 3^1$$

$$a_3 = 3 \times a_2 = 3 \times 4 \times 3 = 4 \times 3^2$$

a_n : Cant de banderines con n franjas sin franjas
juntas del mismo color ni la primera y la última del mismo color.

$\overline{1} \overline{2} \dots \overline{n} \overline{n+1}$ Vámos a separar en 2 casos.

Caso 1: la 1 y la n están pintados del mismo color.

$\overline{1} \overline{2} \dots \overline{n} \overline{n+1}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{a_n} \quad \quad \quad 3$

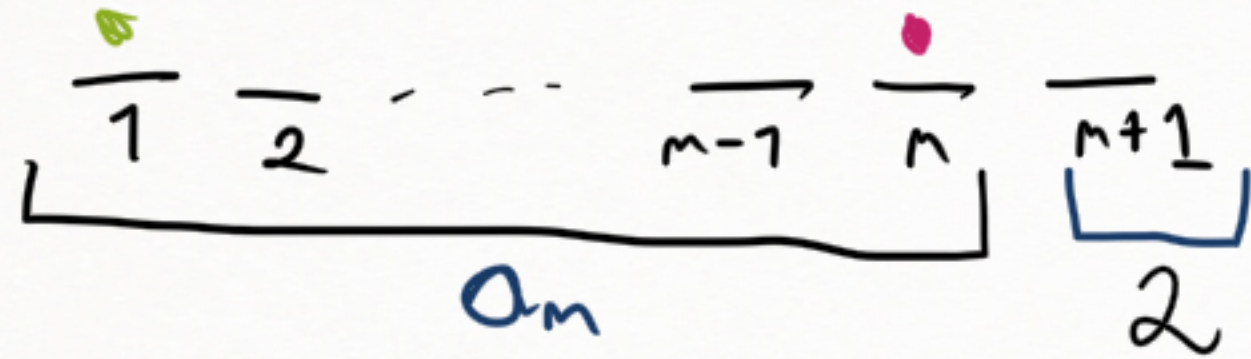
$\Rightarrow$ en este caso son 3 a_n

~~Para los primeros n términos a_n~~ las a_n tienen la 1 y la $n \neq$ por def

Para el $n+1$ no puede ser del color del 1 ni del color del n , pero son el mismo color $\Rightarrow$ 3 colores

Mal

Caso 2 $ld\ 1$ y $ld\ m$ son $\neq$

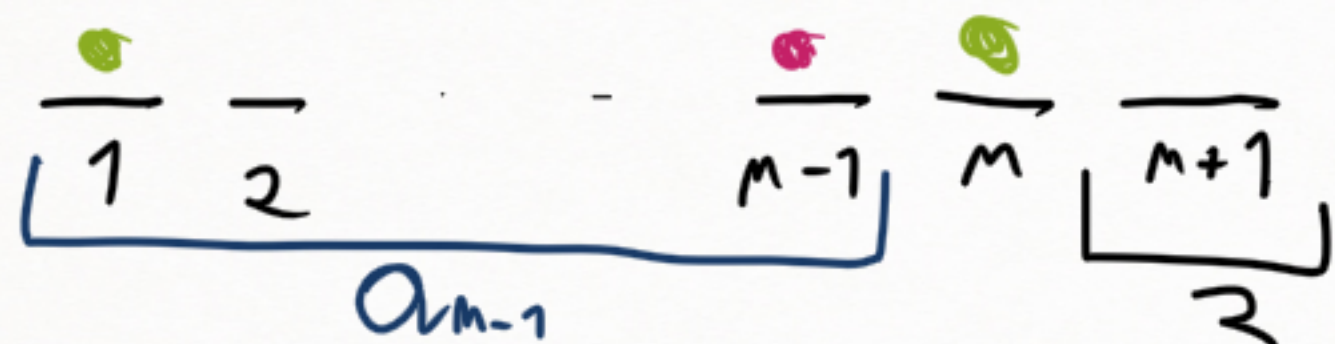


$\Rightarrow 2a_m$

Para los primeros m $ld\ 1$ es distinto de $ld\ m$
 $\Rightarrow$ es una banda con m Franjas donde no hay dos Franjas del mismo color juntas y $ld\ 1^a$ y ld última son $\neq$ a_m

Como $ld\ 1$ y $ld\ m$ son $\neq$, para $ld\ m+1$ tenemos 2 posibilidades

Caso 1 l_1 y l_m tienen el mismo color



¿El 1 y el $m-1$ pueden ser del mismo color? No porque sino $m-1$ y m son del mismo color

$\Rightarrow$ Para los primeros $m-1$ tenemos A_{m-1}

Una vez que elegimos los primeros $m-1$, $l_m = l_1$

Resta elegir l_{m+1} para la cual tenemos 3

$\Rightarrow$ en este caso son $3A_{m-1}$

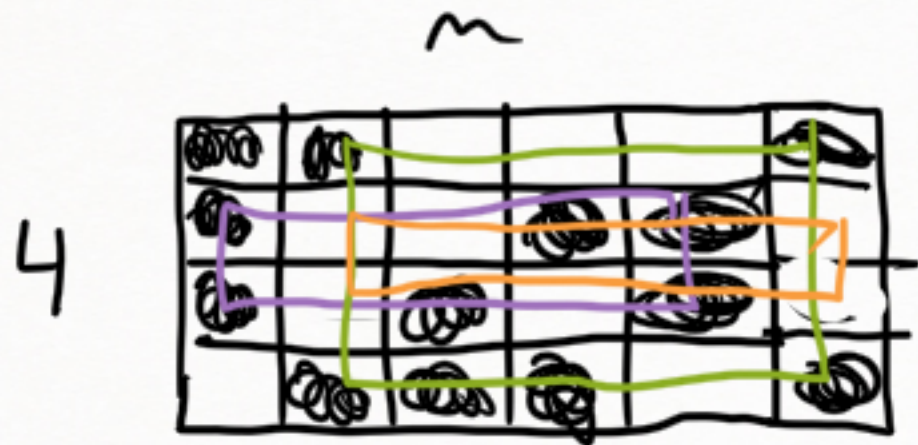
Recurrence

$$a_{m+1} = \underbrace{3a_{m-1}}_{\text{Case 1}} + \underbrace{2a_m}_{\text{Case 2}}$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \text{cont'd 10} \text{ \& mod 10} \\ = 12$$

$$\overbrace{1 \quad \dots \quad n \quad n+1}^{a_n}$$



Consejo: Pensar que cada columna tiene 2 cuadraditos de cada color
 En ese caso se llega al m más grande
 sin que queden rectángulos con los 4
 puntos iguales



Si hay alguna columna con 3 o 4 del mismo color se llega a
 m más chico.



Si ponemos una con 4 del mismo color,
 mandamos con $m=3$.