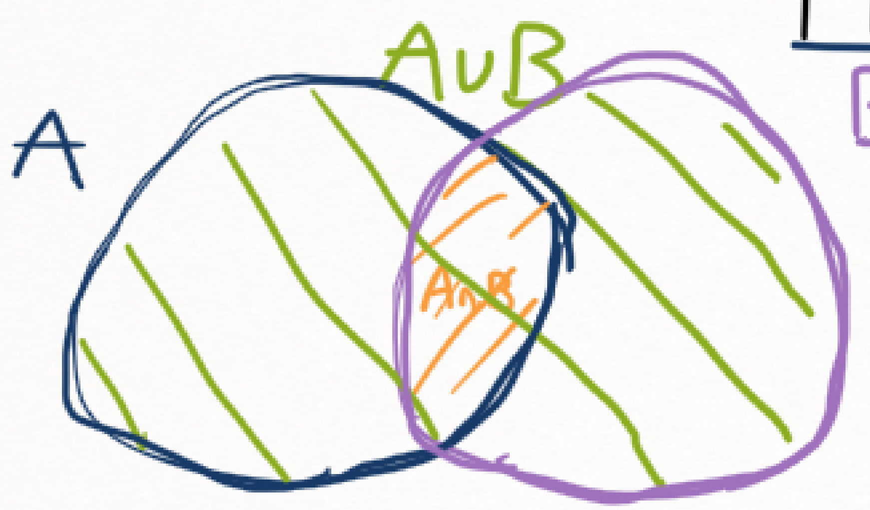
Principio de inclusión exclusión



$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ y $x \in B$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ o $x \in B$

o inclusivo

$x \in A \quad x \notin B$

$x \notin A \quad x \in B$

$x \in A \quad x \in B$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Se resta $|A \cap B|$ porque está contado 2 veces entre $|A|$ y $|B|$

$S = \{$estudiantes de la Fing$\}$

C_1: ser zurdo

C_2: tener un loro de mascota

$C_1 \approx \{$estudiantes que son zurdos$\}$

$C_2 \approx \{$estudiantes que tienen un loro de mascota$\}$

$C_1 \cap C_2 = \{$estudiantes zurdos con un loro de mascota$\}$

$C_1 \cup C_2 = \{$estudiantes que son zurdos o tienen un loro$\}$

$$|C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2| - |C_1 \cap C_2|$$

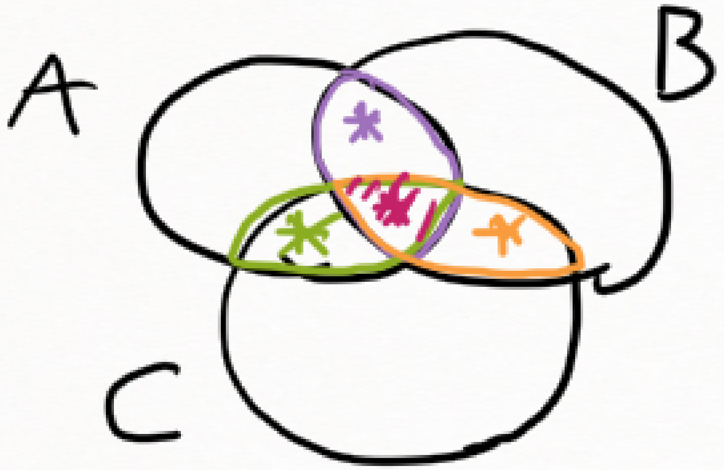
1500 est zurdos

300 est con loro

150 est zurdos con loro

$\Rightarrow$ la cantidad de estudiantes zurdos o con loro de mascota son:

$1500 + 300 - 150 = 1650$



$|A \cup B \cup C|$ = "cosas con intersecciones y no uniones"

* ese punto está contado tanto en $|A|$ como $|B|$. Al restar $|A \cap B|$ queda contado una vez

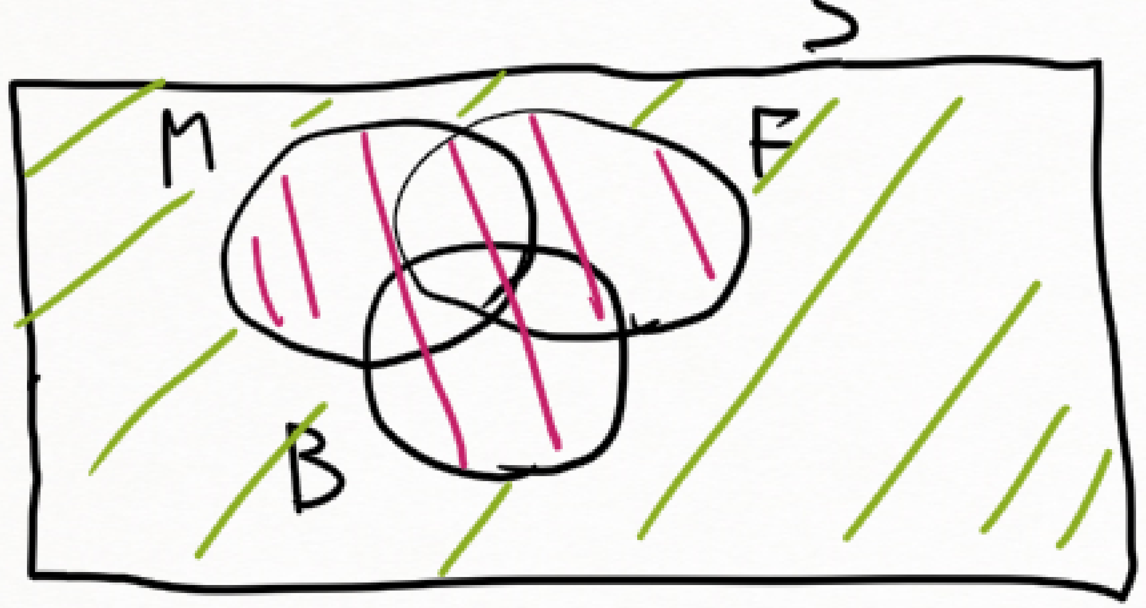
* está contado en $|A|$ y $|C|$ y restado en $|A \cap C|$. En total queda contado una vez

* idem

* contado en $|A|$, $|B|$ y $|C|$ después lo restamos en $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ y $|B \cap C|$ $\Rightarrow$ está contado 0 veces, por lo que se lo vuelve a contar en $|A \cap B \cap C|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = \underbrace{|A| + |B| + |C|}_{\text{los conjuntos de a 1 sumados}} \underbrace{- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|}_{\text{combinaciones de 2 conjuntos intersectados restados}} + \underbrace{|A \cap B \cap C|}_{\text{combinaciones de 3 conjuntos intersectados sumado}}$$



$|S| = 100 \quad |M| = 32 \quad |F| = 20 \quad |B| = 45$

$|M \cap B| = 15 \quad |M \cap F| = 7 \quad |F \cap B| = 10$

$M \cup F \cup B \qquad \overline{M \cup F \cup B} = S - (M \cup F \cup B)$

$|\overline{M \cup F \cup B}| = 30$

lo verde y lo rojo son disjuntos (no se intersectan)

$$|\underbrace{(\overline{M \cup F \cup B}) \cup (M \cup F \cup B)}_{S}| = |\overline{M \cup F \cup B}| + |M \cup F \cup B|$$

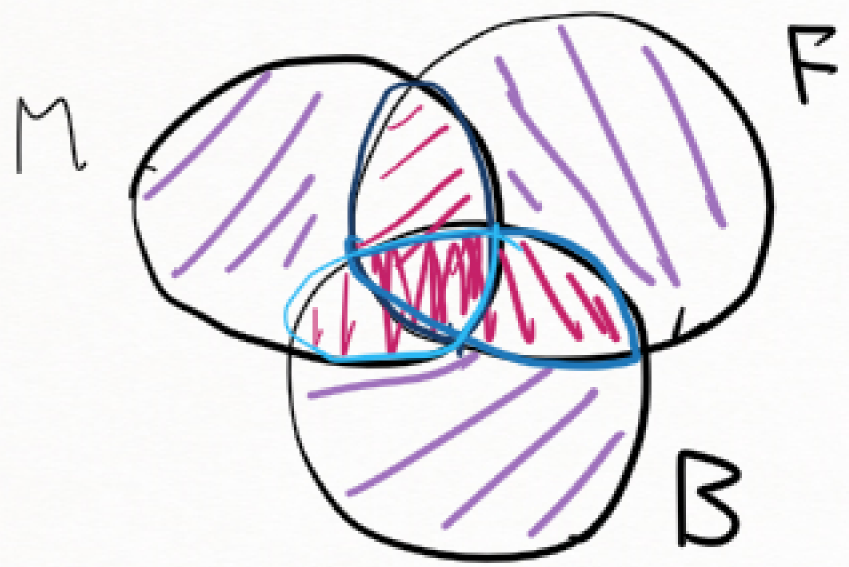
$$|S| = |\overline{M \cup F \cup B}| + |M \cup F \cup B|$$

$$100 = 30 + |M \cup F \cup B| \implies |M \cup F \cup B| = 70$$

$$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| - |M \cap F| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B|$$

$$|M \cap F \cap B| = |M \cup F \cup B| - |M| - |F| - |B| + |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B|$$

$$= 70 - 32 \underbrace{-20 - 45}_{-65} + 7 + 15 + 10 = 5 - 32 + 7 + 15 + 10 = 5$$



Queremos contar lo violeta

$$|\text{rojo}| = |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B| - 2|M \cap F \cap B|$$

$$= 15 + 7 + 10 - 2 \cdot 5 = 22$$

$$|\text{violeta}| = |M \cup F \cup B| - |\text{rojo}| = 70 - 22 = 48$$

4

x_1 1^{era} tirada x_2 2^{da} tirada x_3, x_4, x_5, x_6

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ sea múltiplo de 18

2 casos : $\to x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 18$

$\to x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 36$ ← 1 Forma (los 6 dados salen 6)

resta contar soluciones de $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 18$ $\quad 1 \leq x_i \leq 6$ vamos a usar inc. exc.

$$\underbrace{x_1 - 1}_{y_1} + \underbrace{x_2 - 1}_{y_2} + \underbrace{x_3 - 1}_{y_3} + \underbrace{x_4 - 1}_{y_4} + \underbrace{x_5 - 1}_{y_5} + \underbrace{x_6 - 1}_{y_6} = 18 - 6$$

$1 \leq x_i \leq 6 \Rightarrow 1 - 1 \leq x_i - 1 \leq 6 - 1$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 \quad 0 \leq y_i \leq 5$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 \qquad 0 \le y_i \le 5$$

$S = \{$todas las soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_6 = 12$ con $0 \le y_i\}$

las que queremos $= S - \Big(\underbrace{\{\text{sol con } y_1 > 5\} \cup \{\text{sol con } y_2 > 5\} \cup \{\text{sol con } y_3 > 5\} \cup \{\text{sol con } y_4 > 5\} \cup \{\text{sol con } y_5 > 5\} \cup \{\text{sol con } y_6 > 5\}}_{y_1 > 5 \text{ o } y_2 > 5 \text{ o } y_3 > 5 \text{ o } y_4 > 5 \text{ o } y_5 > 5 \text{ o } y_6 > 5}\Big)$

son todas las que no estamos buscando

$\Rightarrow$ su complemento son las que estamos buscando

$$y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 12 \qquad y_i \leq 5$$

$C_1: y_1 > 5 \quad C_2: y_2 > 5 \quad C_3: y_3 > 5 \quad C_4: y_4 > 5 \quad C_5: y_5 > 5 \quad C_6: y_6 > 5$

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$: los que tienen $y_i > 5$ para algún i

$\underbrace{\overline{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6}}_{\text{son las que buscamos}}$: los que tienen $y_i \leq 5$ para todo i

$S = \{\text{todas las sol.}\}$

ppio inc. exc

$$|\overline{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_6}| = |S| - |C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_6|$$

resultado final

lo contamos usando CR

$|S|$

$S = \{\text{sol de } y_1 + \dots + y_6 = 12 \text{ sin restr}\} \qquad CR^6_{12} = |S|$

$$y_1 + \cdots + y_6 = 12$$

$C_1 \; y_1 > 5 \qquad C_2 \; y_2 > 5 \qquad \cdots \qquad C_6 : y_6 > 5$

$$|C_1 \cup \cdots \cup C_6| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5| + |C_6|$$

$$- \left(|C_1 \cap C_2| + |C_1 \cap C_3| + \cdots + |C_5 \cap C_6| \right)$$ ← todos los pares de condiciones intersectadas sin importar orden C_2^6

$$+ \left(|C_1 \cap C_2 \cap C_3| + |C_1 \cap C_2 \cap C_4| + \cdots + |C_4 \cap C_5 \cap C_6| \right)$$ ← los C_3^6 conjuntos de 3

$$- \left(|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4| + \cdots + |C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6| \right)$$ ← C_4^6 conjuntos de 4

$$+ \left(|C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5| + \cdots + |C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6| \right)$$ ← C_5^6

$$- |C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6|$$

$\boxed{C_1}$ $y_1 \geq 6$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12$

$\underbrace{y_1 - 6}_{z_1} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 - 6$

$z_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 6 \qquad z_1 \geq 0$

CR_6^6

$|C_2|$ $y_2 \geq 6$ se puede hacer lo mismo

$\Rightarrow |C_2| = |C_1| = CR_6^6$

de hecho lo mismo pasa con los otros

$|C_3| = |C_4| = |C_5| = |C_6| = CR_6^6$

¡Ojo! No siempre pasa $|C_1| = |C_2| = |C_3| = |C_4| = |C_5| = |C_6|$

si uno fuera $y_3 > 7 \Rightarrow$ daría distinto

Acá todos dan igual xq son todos $y_i > 5$

$\underline{|C_1 \cap C_2|}$ C_1 y C_2 $\Rightarrow$ $y_1 \geq 6$ y $y_2 \geq 6$

$$\underbrace{y_1 - 6}_{z_1} + \underbrace{y_2 - 6}_{z_2} + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 - 12 = 0$$

$z_1 + z_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 0$ con $z_1, z_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0$

Hay una única solución que es $z_1 = z_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$

$\Rightarrow |C_1 \cap C_2| = 1$

Análogamente a lo anterior, todos los $|C_i \cap C_j| = 1$

$\underline{|C_1 \cap C_2 \cap C_3|}$ $y_1, y_2, y_3 \geq 6$ $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_6 = 12$ es imposible

$|C_1 \cap C_2 \cap C_3| = 0$ también dan 0 los otros de 3, los de 4, los de 5 y los de 6

$$|C_1 \cup \dots \cup C_6| = \overbrace{|C_1|}+\overbrace{|C_2|}+\dots+\overbrace{|C_6|} \quad CR_6^6$$

$$-\left(\overbrace{|C_1 \cap C_2|}+\dots+|C_5 \cap C_6|\right) \quad 1$$

C_2^6 sumandos

el resto son 0

$$= 6 \times CR_6^6 - C_2^6$$

resultado final $= |S| - |C_1 \cup \dots \cup C_6|$

$$= CR_{12}^6 - 6 \times CR_6^6 + C_2^6$$