

#### Ejercicio 4:

Probar que el coeficiente en  $\boxed{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}}$   
de  $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^{(n)}$  es  $\frac{n!}{n_1! \dots n_r!} =: P^n_{(n_1, \dots, n_r)}$

donde  $n_1 + \dots + n_r = n$

$$\begin{aligned} r=2 \quad (x_1 + x_2)^2 &= (\underbrace{x_1 + x_2}) (\underbrace{x_1 + x_2}) \\ n=2 \quad &= x_1^2 + \underbrace{x_1' x_2' + x_2' x_1'} + x_2^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

¿Cual es el coef en  $x_1^1 x_2^1$ ? 2 ¿el coef en  $x_1^2 x_2^0$  es 1  
de cuantos maneras puedo elegir 1  $x_1$  y 1  $x_2$



$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)(x_1 + \dots + x_r) \dots (x_1 + \dots + x_r) = \text{Sumandos de la forma}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\underbrace{\hspace{10em}}$   
 $x_1$                        $x_2$

$$1 \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$   
 una variable ←  
 de cada paréntesis

Fijamos  $n_1 - \dots - n_r$

¿cuál es el coef que multiplica a  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$ ?  
 ¿cuántas veces aparece el producto de variables en la distributiva?

manera de elegir    los  $n_1$  paréntesis de donde elegir  $x_1$   
                                  los  $n_2$                       "                      "                      "  
                                  los  $n_r$                       "                      "                      "

} elegidos

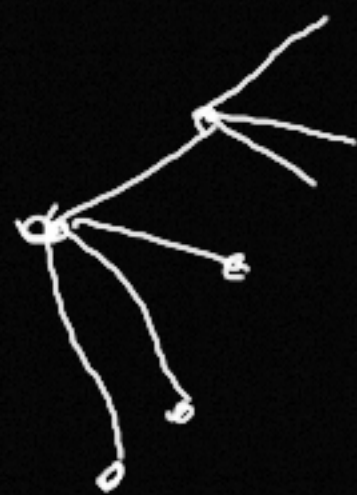


$$(x_1 + \dots + x_r) \cdot (x_1 + \dots + x_r) \dots (x_1 + \dots + x_r)$$

Regla del producto

$$\overline{C_{n_1}^n}$$

$n - n_1$  parentesis disponibles



elección 1

elección 2

$$\overline{C_{n_2}^{n-n_1}}$$

manera de elegir los parentesis de donde sacar la variable  $x_2$ .

$n - (n_1 + n_2)$  disponibles

$$n - (n_1 + \dots + n_{r-1}) = n_r$$

$$\overline{C_{n_3}^{n-(n_1+n_2)}}$$

$$n - (n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}) = n_r$$

porque

$$n_1 + \dots + n_{r-1} + n_r = n$$

$$\overline{C_{n_r}^{n - (n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1})}}$$

$r-1$  elecciones

$\rightarrow r$



la cantidad de maneras de reunir estas  $r$  elecciones

$$\underbrace{C_{n_1}}_{n_1} \cdot \underbrace{C_{n_2}}_{n_2} \cdot \underbrace{C_{n_3}}_{n_3} \cdots \underbrace{C_{n_r}}_{n_r} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! (n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-(n_1+n_2))!}{n_3! (n-(n_1+n_2+n_3))!} \cdots \frac{(n-(n_1+\dots+n_{r-1}))!}{n_r! (n-(n_1+\dots+n_r))!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} =: P_{n_1, n_2, \dots, n_r}^n$$



# Ejercicio 13:

(X)

(a) Hallar el coeficiente de  $x^5$  en el desarrollo

de  $(\underbrace{x^5}_{x_1} + \underbrace{x}_{x_2} - \underbrace{1}_{x_3})^{10}$

$(x^5 + x - 1)(x^5 + x - 1) \dots (x^5 + x - 1) =$  sumandos de la forma  
10 veces

$\rightarrow (x_1)^{n_1} (x_2)^{n_2} (x_3)^{n_3}$

$n_1 + n_2 + n_3 = 10$

Como  $n_1 = 1$

$n_1 = 1$

$n_2 = 0$

$n_3 = 9 \rightarrow$  porque  $n_1 + n_2 + n_3 = 10$

$(x^5)^{n_1} (x)^{n_2} (-1)^{n_3}$

$= a \cdot x^5$   
Como  $n_1 = 0$

$n_1 = 0$

$n_2 = 5$

$n_3 = 5$

$n_1 + n_2 + n_3 = 10$

$$(-1)^{2n} = 1$$

caso ① : Cuántas veces aparece  
en el desarrollo

$$(x^5)^1 (x)^0 \underbrace{(-1)^1}_{-1} = -x^5$$

$$(-1)(-1)(-1)$$

Usando el ej 4:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} = \frac{10!}{1! \cdot 0! \cdot 9!} = \boxed{10}_x$$

"        "

1        1

elegir el paréntesis de donde

saco el  $x^5$ ,  $C_{11}^{10} = 10 \leftarrow$

caso ② : cuántas veces aparece  $(x^3)^0 (x)^5 \underbrace{(-1)^5}_{(-1)} = -x^5$

o anterior  $\frac{10!}{0! 5! 5!} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$

o elegir los 5 paréntesis de donde  
saco la  $x$ ,  $\boxed{C_{10}^5}$



me aparecen  $(10 + C_5^{10})$  veces  $-x^5$

$\Rightarrow$  el coef que multiplica a  $x^5$

es  $-(10 + C_5^{10})$

Ejercicio 14 :

$\overbrace{|\text{Sob}(m, i)|}^{\uparrow \uparrow}$  = cantidad de funciones sobreyectivas  
de  $m$  elementos en  $i$  elementos.

$$n^m = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \text{Sob}(m, i)$$

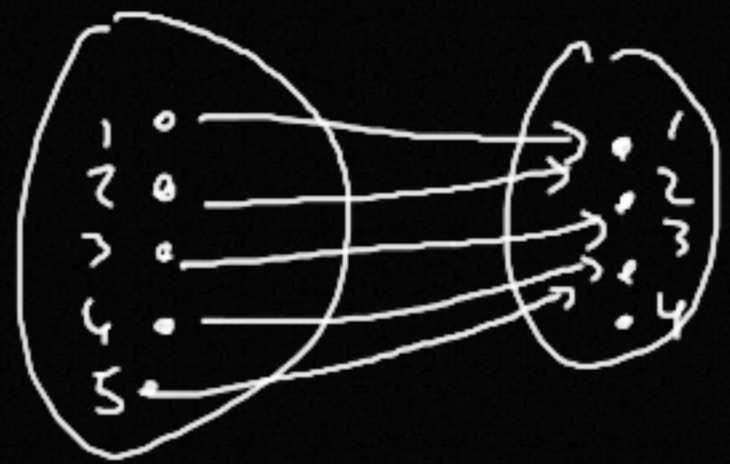
$\underbrace{\hspace{10em}}$  queremos ver que es  
otra manera de contar  
con  $f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

es la cantidad  
de funciones

$$f: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$



$$\text{Im}(f) = \{ f(x) : x \in \{1, \dots, m\} \}$$



$$\text{Im}(f) = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{a, b, c, d\} \quad |C| = 4$$

A la cantidad de elementos de un conjunto  $C$

la notamos  $|C|$ , <sup>denota</sup> el cardinal de  $C$

$$\#C$$

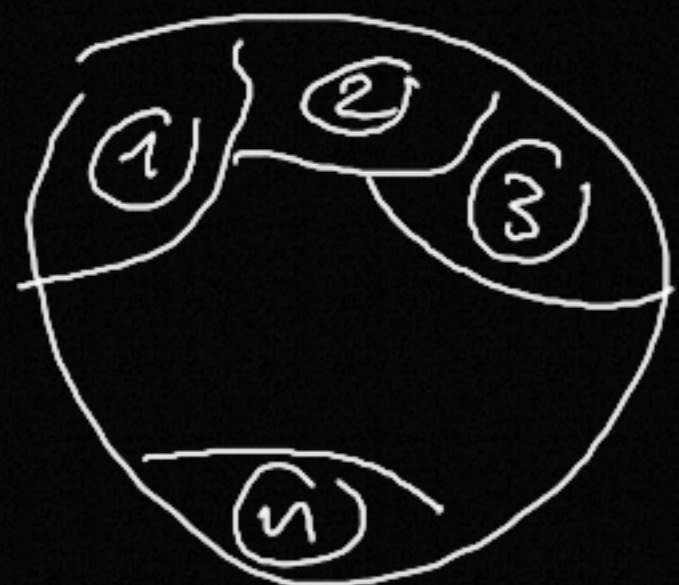
$$|\text{Im}(f)| = 3$$



$$f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

todos los  $f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

- $\rightarrow$  ①  $f$  tales que  $|Im(f)| = 1$
- $\rightarrow$  ②  $f$  tales que  $|Im(f)| = 2$
- $\vdots$
- $\rightarrow$  ④  $f$  tales que  $|Im(f)| = n$

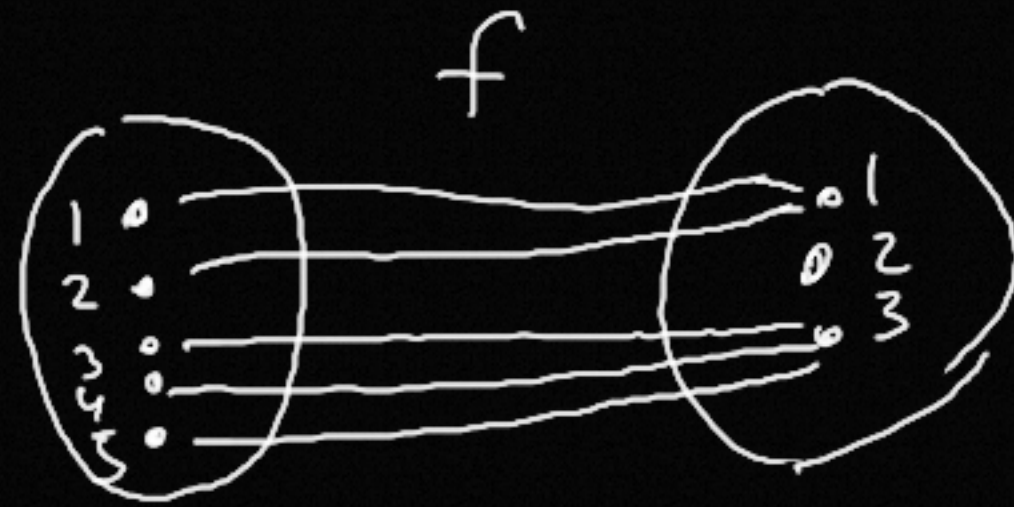


$$\underbrace{h^m}_{i=1} = \sum_{i=1}^n \left( \text{cantidad de funciones } f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\} \text{ tales que } |Im(f)| = i \right)$$



$m = 5$   
 $n = 3$   $f$

1 2  
 2 3  
 1 3

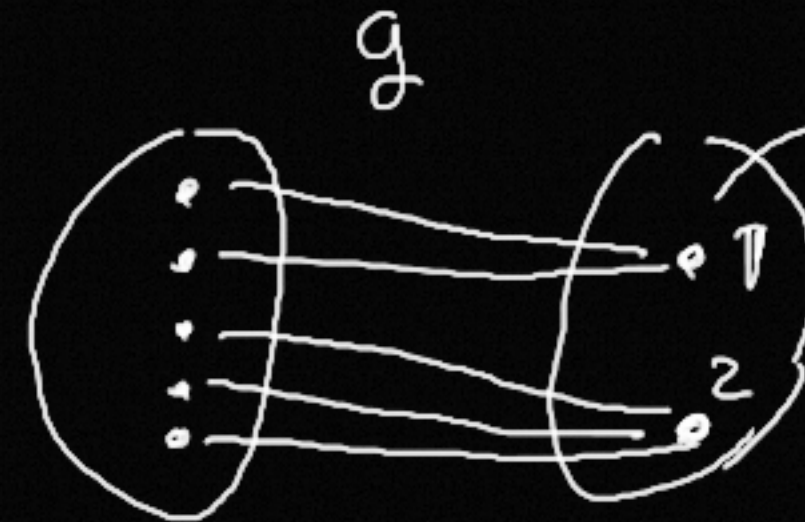


$i = 2$



①  $Im(f) = \{1, 2\}$

②



$Im(f)$

$g$  es sob

$(f) \leftrightarrow (Im(f), g)$

Elegir la imagen de f

y elegir una  $g \in Sob(5, 2)$

es lo mismo que elegir f

$(u, i)$



$|f^{-1}(i)| = \bar{i}$   
① Elegir la imagen de  $f$ : tengo  $\binom{n}{\bar{i}}$  maneras de hacerlo  
 $C_{\bar{i}}^n$

② Elegir una  $g: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, i\}$ : tengo  $\text{sob}(m, i)$  maneras de hacerlo.  
sobreyectiva

$$\Rightarrow n^m = \sum_{\bar{i}=1}^n \binom{n}{\bar{i}} \cdot \text{sob}(m, i)$$



$$S(m, n) := \frac{Sob(m, n)}{n!}$$