

Ejercicio 4

Probar que el coeficiente en $\overbrace{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}}$ de $(x_1 + \dots + x_r)^n$ es $PR_{(n_1, \dots, n_r)}^n = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$ donde los exponentes son $n_1 + \dots + n_r = n$

$$r=2 \quad n=2$$
$$(x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = \overbrace{x_1 x_1}^{x_1 x_1} + \overbrace{x_1 x_2 + x_2 x_1}^{x_2 x_2} + \overbrace{x_2 x_2}^{x_2 x_2} = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

cada sumando tiene un producto de $\downarrow$ x_i 's tomados una de cada paréntesis.
 n

$\rightarrow$ ¿coef en $x_1^1 x_2^1$? es 2 $\rightarrow$ de cuantos maneras puedo elegir un x_1 y un x_2 en cada paréntesis.
¿coef a x_1^2 ? es 1

$$\overbrace{(x_1 + \dots + x_r)}^{n \text{ veces}} \dots (x_1 + \dots + x_r) =$$

$$= \text{sumandos de la forma } x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_r^{n_r}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

Fijamos $n_1, \dots, n_r$ cual es el coef en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$

es la cantidad de maneras en que podemos elegir

$$\begin{array}{l} 1 \\ \rightarrow 2 \\ \vdots \\ r \end{array} \left[\begin{array}{ll} \bullet & n_1 \text{ paréntesis } \text{de donde elegiremos la variable } x_1 \\ \bullet & n_2 \text{ " " la " } x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \bullet & n_r \text{ " " " " } x_r \end{array} \right]$$

Vamos a usar la regla del producto

- n_1 • $\binom{n}{n_1}$ maneras de elegir n_1 paréntesis (para la variable x_1)
- n_2 • me quedan $n - n_1$ disponibles
 $\binom{n - n_1}{n_2}$ maneras de elegir n_2 paréntesis (para la variable x_2)
- n_3 • $n - (n_1 + n_2)$ disp.
 $\binom{n - (n_1 + n_2)}{n_3}$ (de x_3)
- ⋮
- $n - (n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1}) = n_r$ disponibles
 $\binom{n - (n_1 + \dots + n_{r-1})}{n_r}$
- r •
- porque $\overbrace{n_1 + \dots + n_{r-1} + n_r} = n$
 $n - \overbrace{(n_1 + \dots + n_{r-1})} = n_r$

la cantidad de maneras de realizar todos los ejercicios es:

$$C_{n_1}^n \cdot C_{n_2}^{n-h_1} \cdot C_{n_3}^{n-(h_1+h_2)} \cdots C_{n_r}^{n-(h_1+\dots+h_{r-1})}$$

$$\frac{n!}{n_1! (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! (n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-(n_1+n_2))!}{n_3! (n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{[n-(n_1+\dots+n_r)]!}{n_r! (n_r-n_r)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

Ejercicio 13 :

Hallar el coef en x^5 en el desarrollo de

$$\left(\underbrace{x^5}_{x_1} + \underbrace{x}_{x_2} - \underbrace{1}_{x_3} \right)^{10}$$

los sumandos que salen
al hacer distributiva tienen la forma

$$a \cdot x^5$$

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \quad n_1 + n_2 + n_3 = 10$$

"

$$(x^5)^{n_1} (x)^{n_2} (-1)^{n_3}$$

para que n_1 , n_2 y n_3

$$(x^5)^{n_1} (x)^{n_2} (-1)^{n_3} = a x^5$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ n_1 + n_2 + n_3 = 10 \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{caso} \quad \bullet n_1 = 1 \\ \Rightarrow \bullet n_2 = 0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow n_3 = 10 - (n_1 + n_2) = 10 - 1 = 9$$

$$\begin{array}{l} n_1 = 1 \\ n_2 = 0 \\ n_3 = 9 \end{array}$$

$$(X^5)^{n_1} \underbrace{X^{n_2} (-1)^{n_3}} = a X^5$$

n_1 no puede ser ≥ 2 : X^{10}, X^{15}

$$\textcircled{*} 10 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdots 1} = \frac{10!}{9!}$$

$$n_1 = 0$$

$$n_2 = 5$$

$$\Rightarrow n_3 = 5$$

↓

$$n_1 + n_2 + n_3 = 10$$

y esos son los únicos conos
por n_1 solo puede valer 0 o 1

¿Cual es el coef que multiplica
 $-X^5 = (X^5)^1 X^0 (-1)^9$?

usando el ej anterior

$$\begin{matrix} h_1 = 1 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 9 \end{matrix} \quad h = 10$$

el coef es $\frac{10!}{1! \cdot 0! \cdot 9!} = 10$ $\textcircled{*}$

10 paréntesis

$$\underbrace{(x^3 + x - 1)(x^5 + x - 1) \dots (x^5 + x - 1)}_{10 \text{ paréntesis}} \quad C_{10}^{10} = 10$$

) () - - -)

¿cuál es el coef que multiplica a $\frac{(x^3)^0 (x)^5 (-1)^5}{\underbrace{-x^5}}?$

eligiendo $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!}$

o usando el ej anterior $\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} = \frac{10!}{0! 5! 5!} = \frac{10!}{5! 5!}$

el coef en $-x^5$ es $\left(\frac{+10!}{5!5!} + 10 \right)$ el coef en x^5 es $-\left(\frac{10!}{5!5!} + 10 \right) = -262$

Ej 14:

$\text{Sob}(m, i) =$ la cantidad de funciones sobreyectivas
de $\{1, \dots, m\}$ en $\{1, \dots, i\}$

$$(a) \quad n^m = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \text{Sob}(m, i)$$

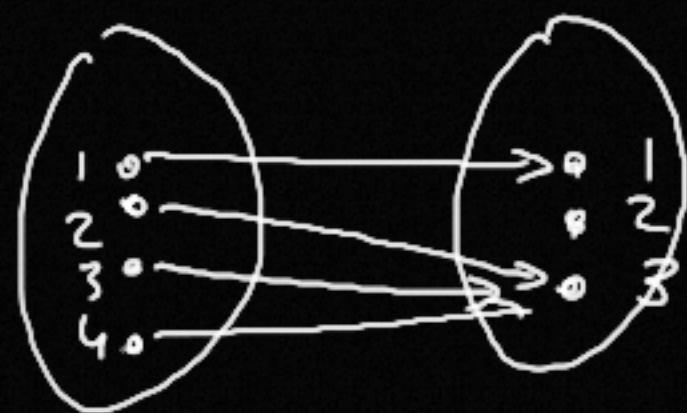
$\downarrow$
la cantidad
de funciones
de $\{1, \dots, m\}$ en
 $\{1, \dots, n\}$

$\downarrow$

voy a probar que es otra manera
de contar las funciones

$$f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$\text{Im}(f) = \{ f(x) : x \in \{1, \dots, m\} \}$$



$$\text{Im}(f) = \{1, 3\}$$

$$|\text{Im}(f)| = 2$$

para denotar la cantidad de elementos de un conjunto A escribimos $|A|$
↓
 decimos cardinal de A

$$f : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

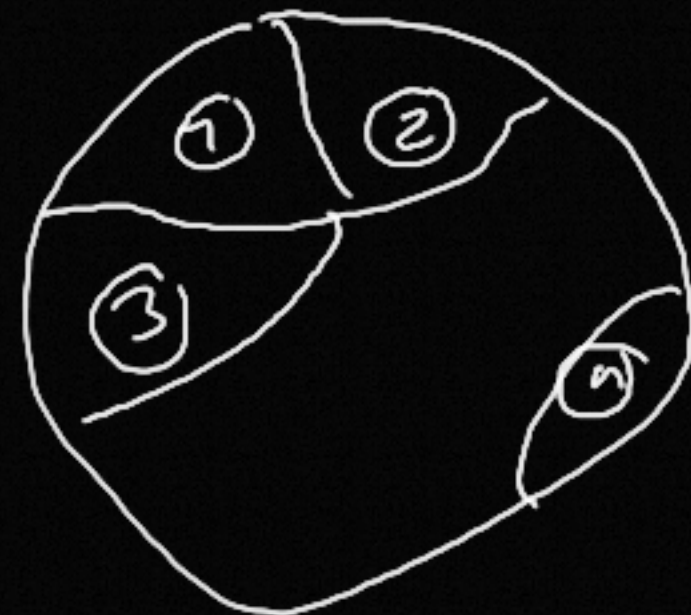
$$\rightarrow \textcircled{1} \quad f \text{ talen que } |\text{Im}(f)| = 1$$

$$\rightarrow \textcircled{2} \quad f \text{ talen que } |\text{Im}(f)| = 2$$

...

$$\rightarrow \textcircled{n} \quad f \text{ talen que } |\text{Im}(f)| = n$$

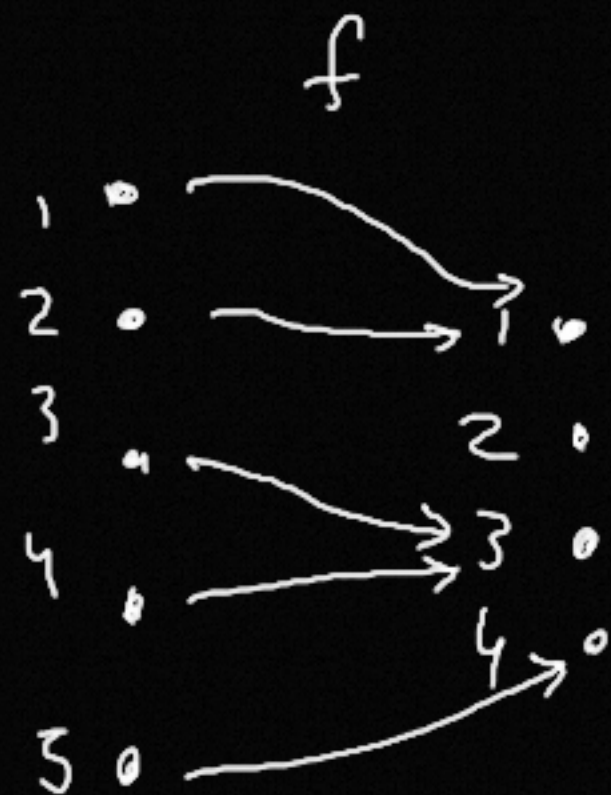
todas las funciones



y además no se intersectan

$$h^m = \sum_{i=1}^n (\text{cantidad de funciones tales que } |\text{Im}(f)| = i)$$

$\{1..m\}$
↓
 $\{1..n\}$



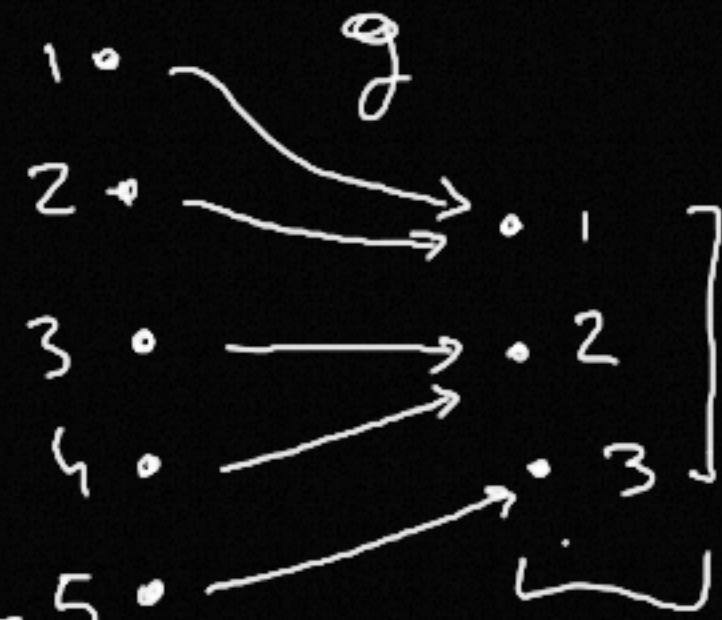
$i=3$

①

Sobreyectiva

②

$\text{Im}(f)$



$\{1, 3, 4\}$

regla del producto

las funciones cuya
imagen tiene tamaño i

↔ ①

elegir una función sob $\{1..m\} \rightarrow \{1..i\}$

②

elegir los elementos de la
imagen

$$\frac{\text{Sob}(m, n)}{n!} = : S(m, n)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{Sob}(m, i)$$

$$\textcircled{2} \quad C_i^n = \binom{n}{i}$$

En total hay $\left| \text{Sob}(m, i) \cdot \binom{n}{i} \right|$ funciones cuya imagen tiene tamaño i ,

$$n^m = \sum_{i=1}^n \text{Sob}(m, i) \cdot \binom{n}{i}$$