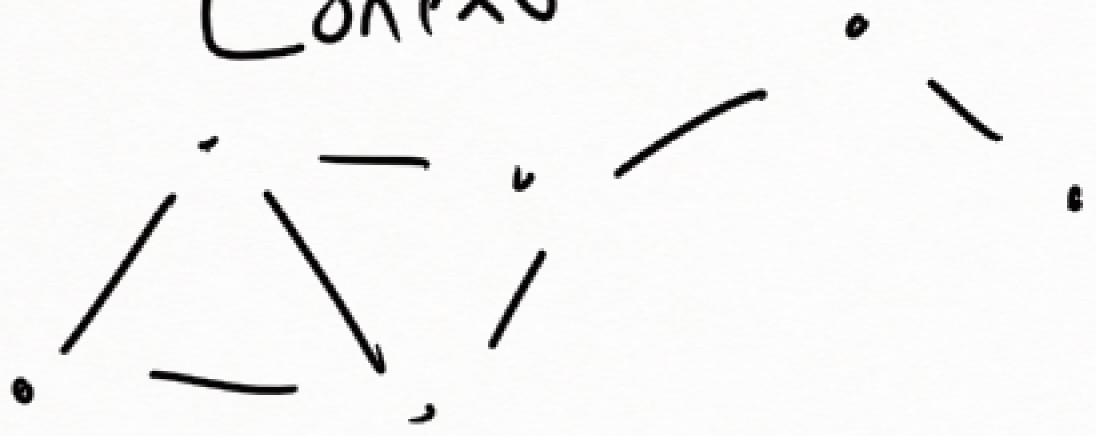
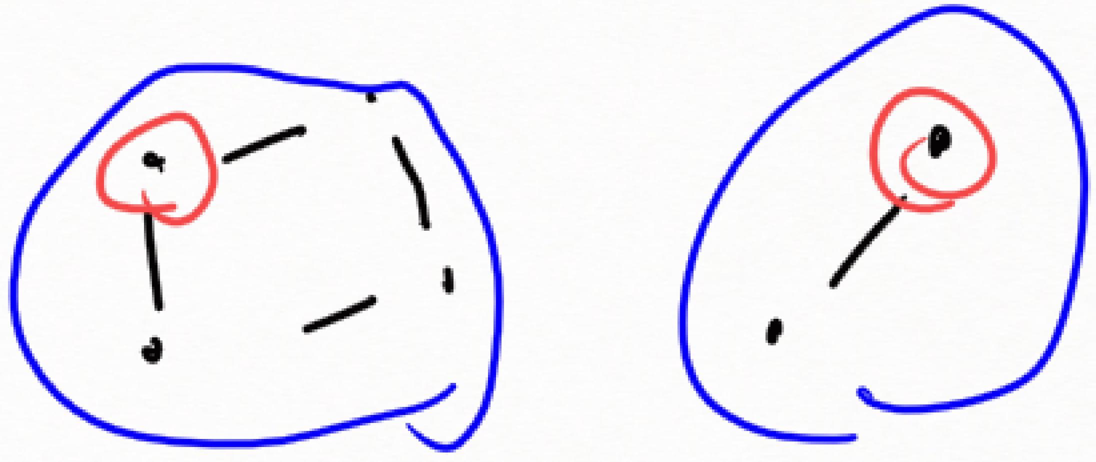
Conexo



No conexo



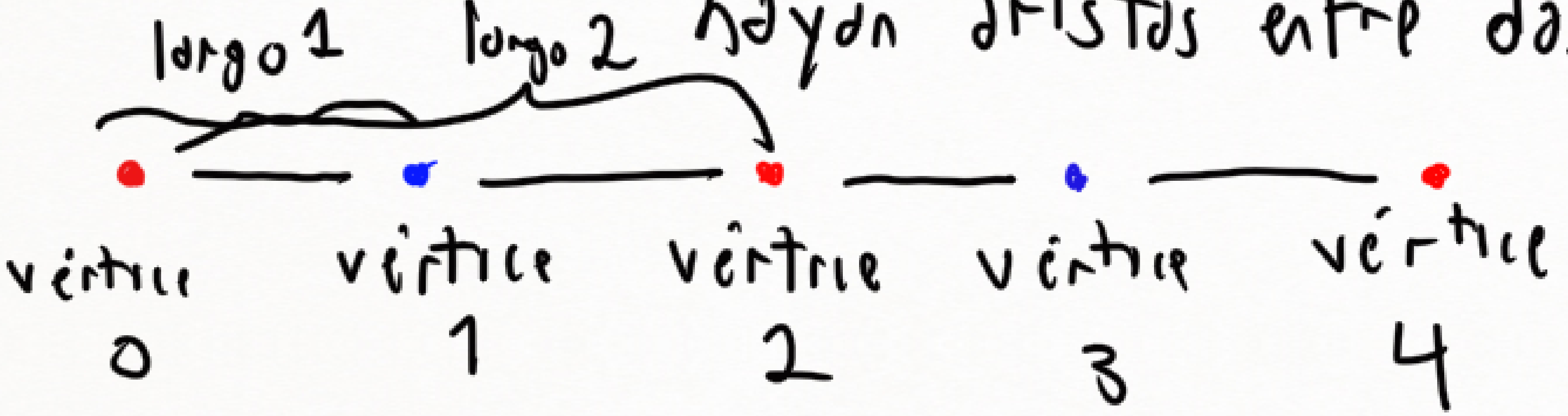
componentes conexas

3 $\chi(G)=2 \iff$ G no tiene ciclos de largo impar

G tiene alguna arista

Directo: $\chi(G)=2 \Rightarrow$ G no tiene ciclos de largo impar.

$\chi(G)=2 \Rightarrow$ Lo podemos colorear con 2 colores de modo que no hayan aristas entre dos vértices del mismo color.



Los lugares impares son azules y las pares son rojos

Para que se cierre un ciclo, el último vértice debe ser del mismo color que el primero $\Rightarrow$ largo par

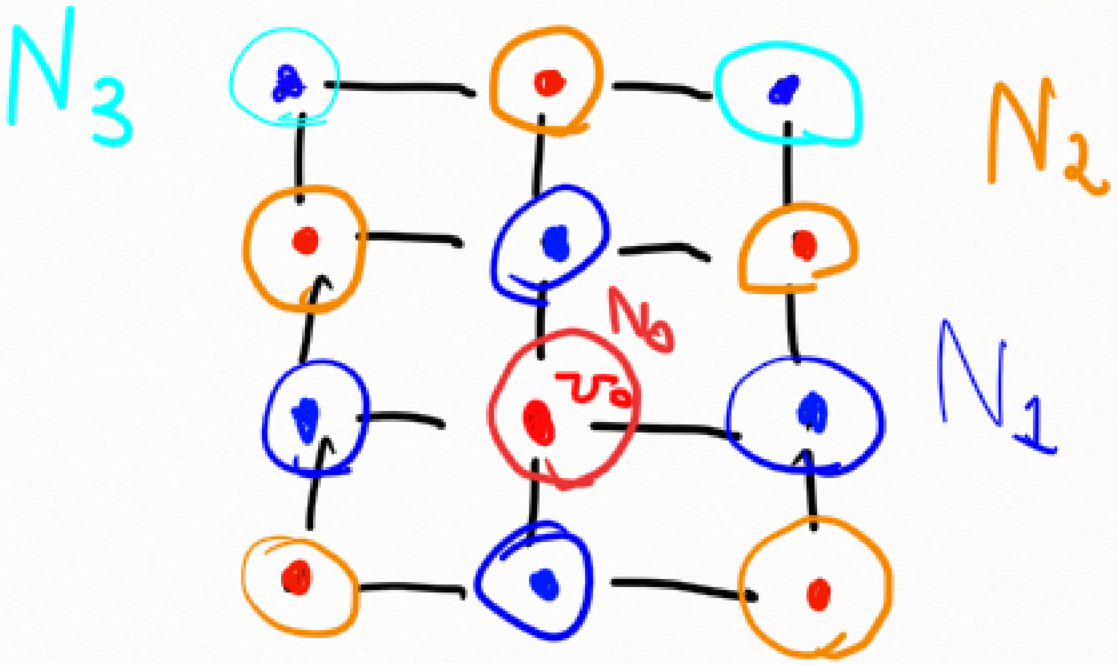
$\Rightarrow$ no hay ciclos de largo impar.

Recíproco: G no tiene ciclos de largo impar $\Longrightarrow \chi(G) = 2$

Sea G un grafo sin ciclos de largo impar. Supongo que G es conexo (dsps vemos qué pasa si no lo es). Queremos colorearlo con 2 colores. Vamos a colorearlo con un algoritmo y después probar que es válido

(G $\chi(G) = 1$. Vamos a suponer que hay al menos una arista $\Rightarrow$ se precisan al menos 2 colores)

1) Fijamos v_0 vértice inicial (cualquiera)
2) Pintamos v_0 de rojo y definimos
Nivel 0 $= \{v_0\}$
3) Cuando el nivel m está pintado:
4) Nivel $m+1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{vértices que no se han pintado} \\ \text{y son adyacentes a alguno del} \\ \text{nivel } m \end{array} \right\}$
5) Pintamos los vértices del nivel $m+1$ del color opuesto al del nivel m
6) Repetimos el paso 3 aumentando m hasta que todos los vértices estén pintados.



¿El algoritmo termina?
Sí termina, porque el grafo es conexo, entonces se llega a todos los vértices y quedan todos pintados.

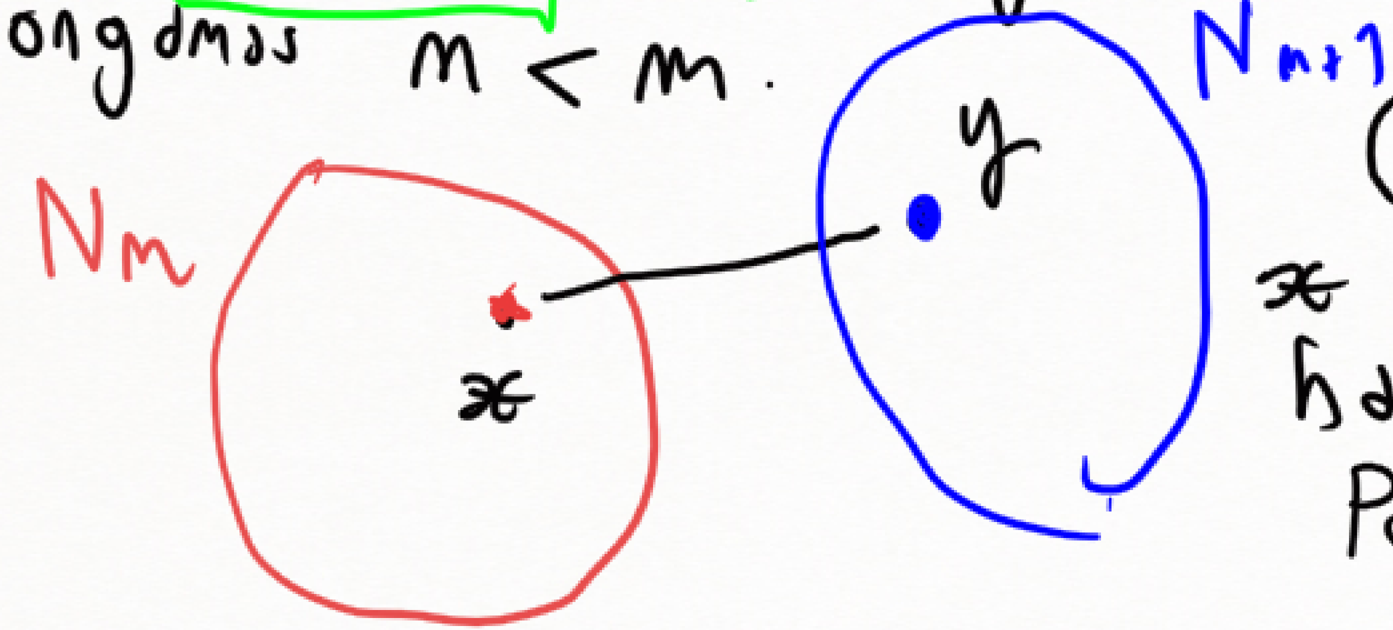
Logramos pintar todo el grafo. Hay que demostrar que no hay aristas entre vértices de igual color.

Supongamos que hay una arista entre dos vértices rojos (el caso de arista entre dos azules es igual) vértices x, y los dos rojos y hay una arista

$x \in$ nivel n $\quad$ $y \in$ nivel m

$\Longrightarrow$ $\boxed{n = m}$ (x e y están en el mismo nivel). Vamos a verlo:

supongamos $n < m$.



Cuando el algoritmo va por la etapa n x está pintado de rojo y y no se ha pintado aún.

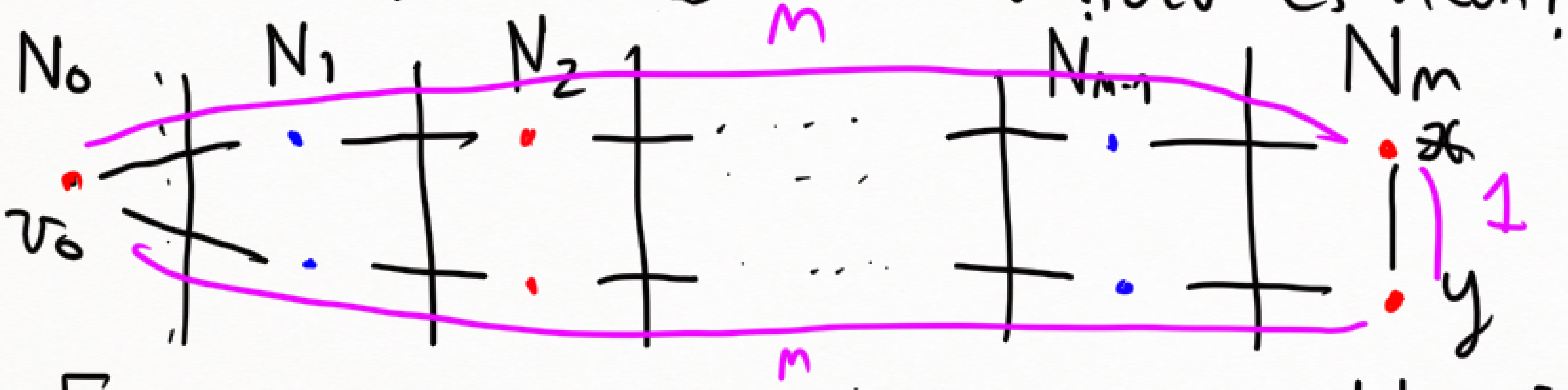
Por otra parte y es adyacente a x

$\Longrightarrow$ el algoritmo mete a y en el nivel $n+1$ y la pinta de azul

$\Longrightarrow$ no puede pasar $n \neq m$ $\quad \Longrightarrow$ $n = m$

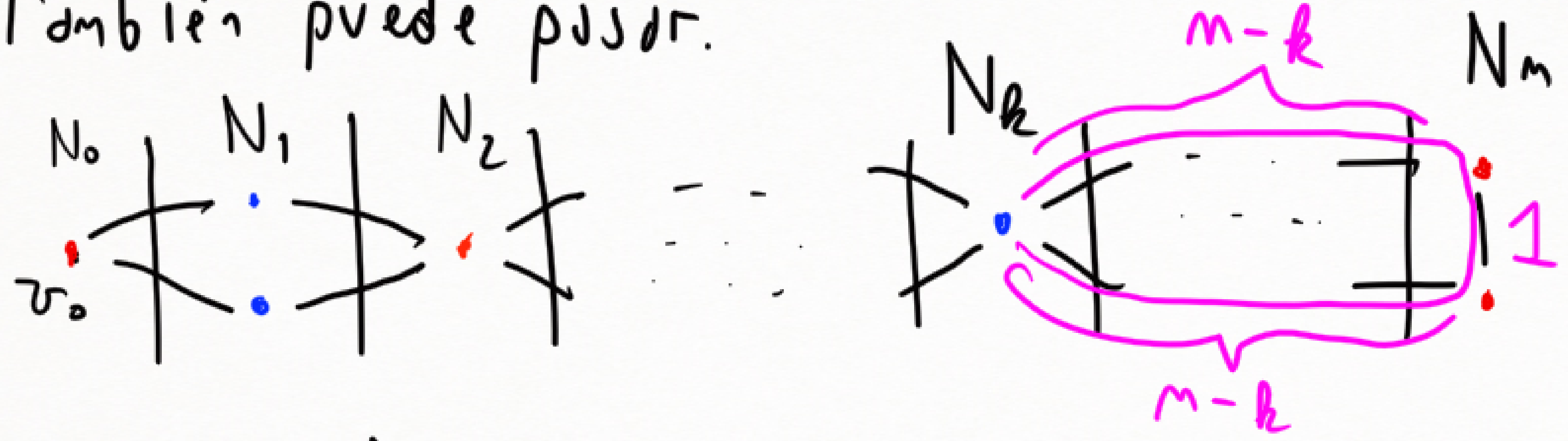
Estamos suponiendo 

Ya probamos que están en el mismo nivel (no pueden estar en niveles $\neq$). Lo que vamos a hacer es encontrar un ciclo de largo impar.



Ciclo de largo $2m+1$ impar

Eso sirve si el camino de v_0 a x y el de v_0 a y son disjuntos.
También puede pasar.



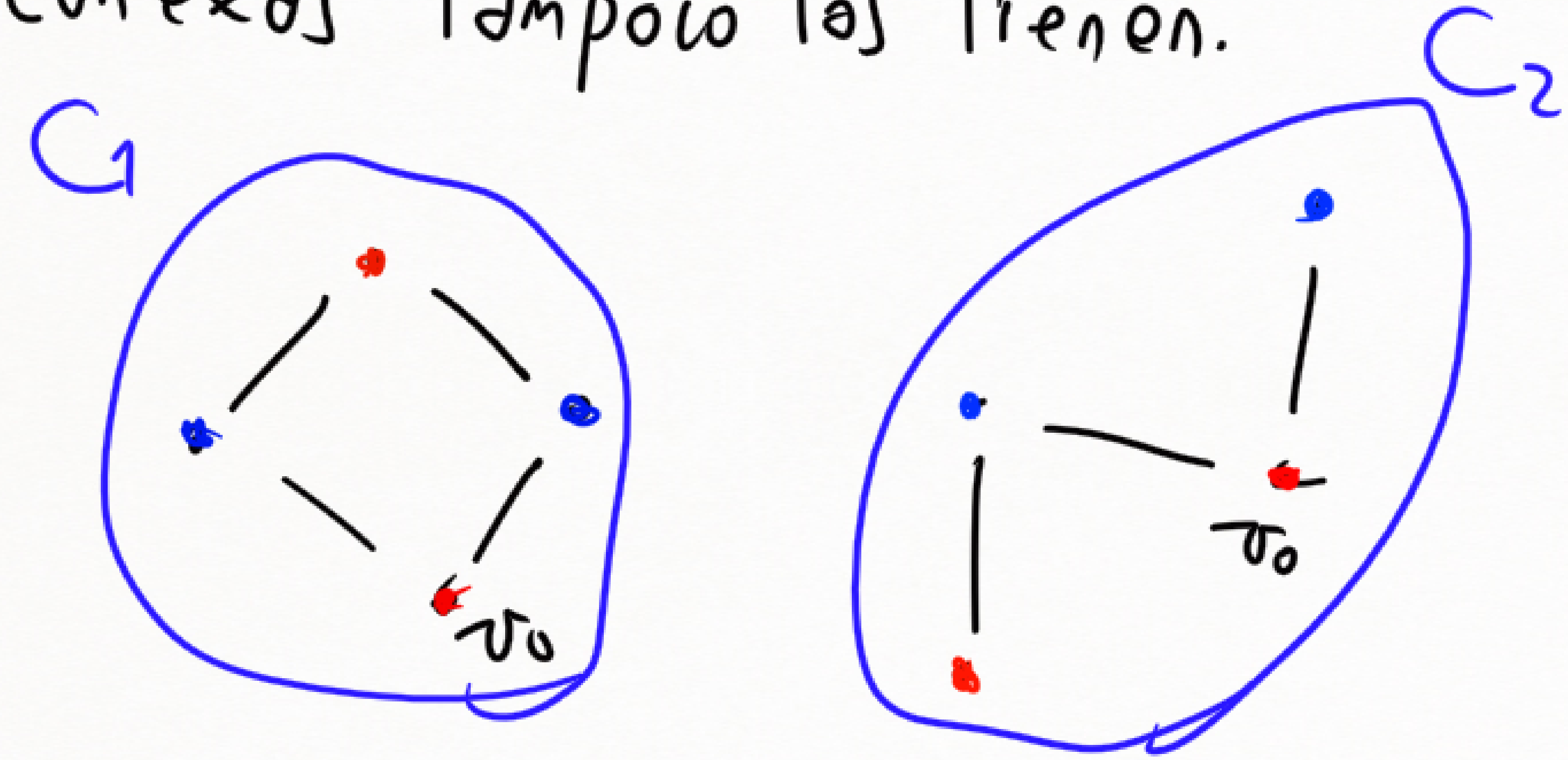
Sea k el último nivel en el que los caminos se juntan.

Ciclo de largo $2(m-k)+1$ impar

$\Longrightarrow$ Hay ciclo de largo impar. Absurdo $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{No hay arista entre dos rojos}}$

Si G no es conexo aplicamos el algoritmo en cada componente conexa y con eso queda la coloración.

Observar que si G no tiene ciclos de largo impar, sus componentes conexas tampoco los tienen.



Aplicamos el algoritmo en C_1 y luego en C_2

Polinomio cromático

Dado un grafo G ¿de cuántas formas se lo puede colorear usando λ colores? (No hay xq usarlos todos)

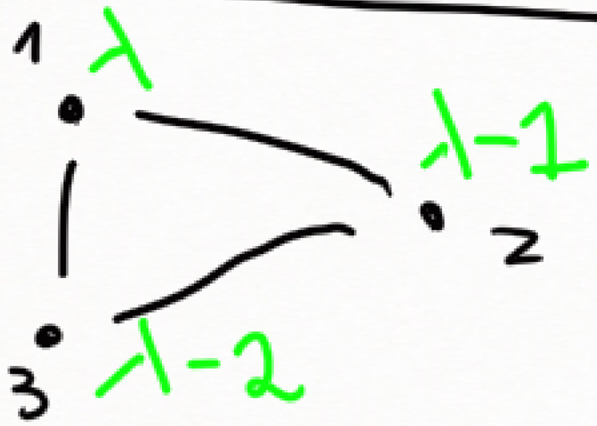
La respuesta siempre es un polinomio en λ, denotado $P_G(\lambda)$ o $P(G,\lambda)$

¿de qué formas se calcula?

1) Por regla del producto. Solo sirve con ciertos grafos.
2) Agregado y contracción / Quitado y contracción
3) Un teorema que sirve si $G = G_1 \cup G_2$ $\quad G_1 \cap G_2 = K_m$

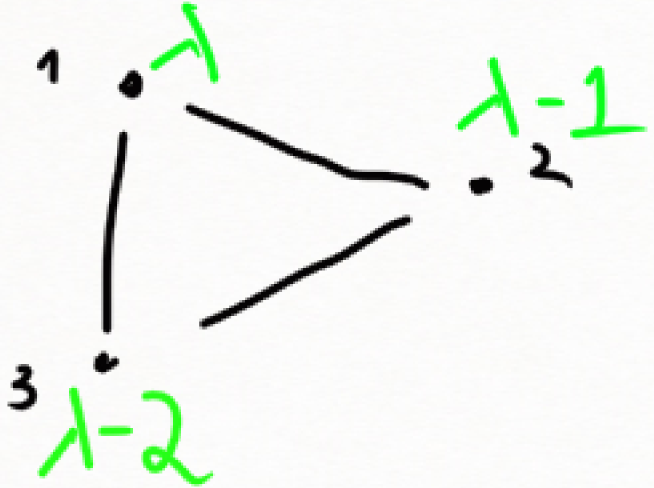
---

1)



λ colores

colorear vértice 1	colorear vértice 2	colorear vértice 3
λ	$\lambda-1$	$\lambda-2$



V_1: λ colores

V_2: no se puede repetir el coror del 1

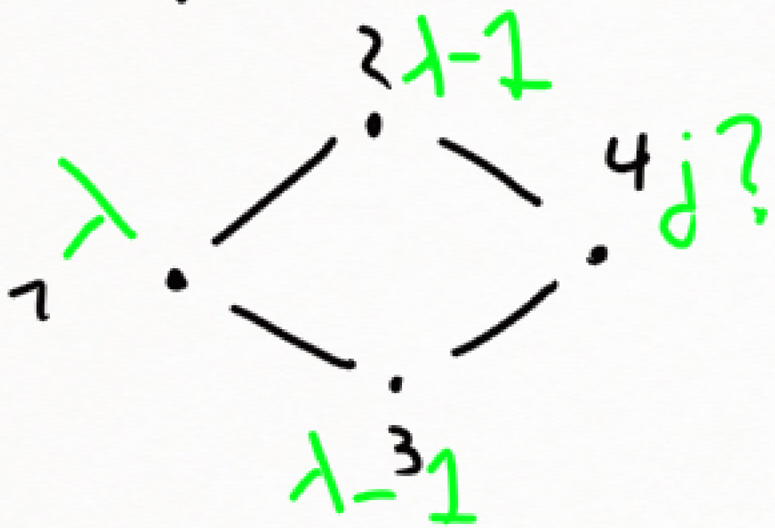
$\Longrightarrow \lambda - 1$

V_3: no puede repetir el color del 1 ni el del 2

$\Longrightarrow$ Hay $\lambda-2$ colores

Por regla del producto $\quad P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

Hay casos en los que la regla del producto no sirve.



V_4 no pue repetir el color del 2 y el del 3.

si el 2 y el 3 tienen = color $\Longrightarrow \lambda-1$ para el 4

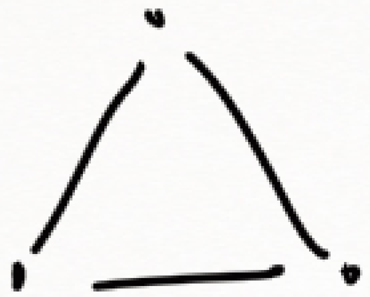
si el 2 y el 3 tienen $\neq$ color $\Longrightarrow \lambda-2$ para el 4

¿Cuál es la relación entre $\chi(G)$ y $\uparrow_G(\lambda)$?

G se puede colorear con λ colores $\iff \uparrow_G(\lambda) > 0$

$\chi(G)$ mínima cantidad de colores necesarios para que exista coloración $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\chi(G) &= \text{mínimo } \lambda \text{ tq } \uparrow_G(\lambda) > 0 \\ &= \min\{\lambda > 0 \,/\, \uparrow_G(\lambda) > 0\}\end{aligned}}$$



$$\boxed{\uparrow_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

$\chi(G)$

$\uparrow_G(1) = 0 \quad \uparrow_G(2) = 0 \quad \uparrow_G(3) = 6 > 0$

no (A o B) $\iff$ no A y no B

$e \leq 2v - 6$

v e_1 aristas de G e_2 aristas de $\overline{G}$

$e_1 \leq 3v - 6$

$e_2 \leq 3v - 6$

$\Longrightarrow e_1 + e_2 \leq 6v - 12$

$e_1 + e_2 = \dfrac{v(v-1)}{2}$

$\Longrightarrow v^2 - v \leq 12v - 24$ $v^2 - 13v \leq -24$