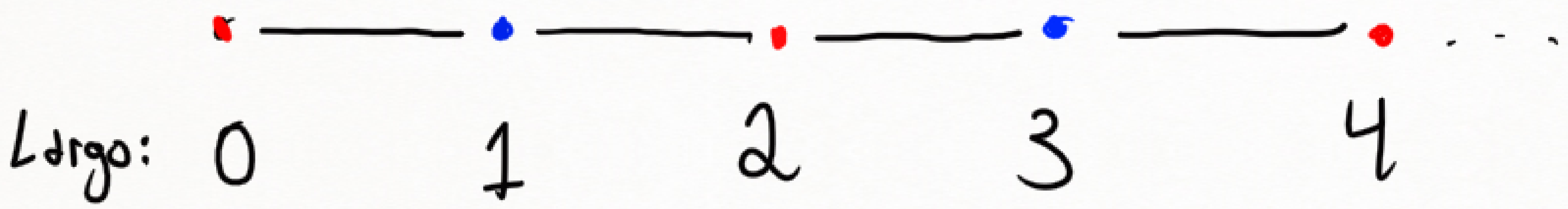
3. $\chi(G) = 2 \iff$ G no tiene ciclos de largo impar.

Directo: $\chi(G) = 2 \implies$ G no tiene ciclos de largo impar.

Supongamos que G es un grafo que se colorea con 2 colores.
Vamos a probar que no pueden haber ciclos de largo impar.



Como los colores van alternando, los caminos de largo impar arrancan y terminan en colores distintos. $\implies$ Ningún camino de largo impar puede ser un ciclo (tendría que arrancar en el mismo vértice).

Recíproco: G no tiene ciclos de largo impar $\Rightarrow \chi(G) = 2$

(Se asume que G tiene al menos una arista. Sino $\chi(G) = 1$)

Voy a suponer que G es conexo. Después vemos cómo hacemos si no lo es.

Voy a usar el siguiente resultado (que se deduce del Ej 8 (d))

<u>Lema</u>: Los árboles tienen número cromático 2. Cualquier árbol se puede colorear con 2 colores.

G conexo sin ciclos de largo impar.

G conexo $\Rightarrow$ Existe G' subárbol recubridor de G, G' tiene todos los vértices de G y saco aristas para ser árbol.

(Ej

)

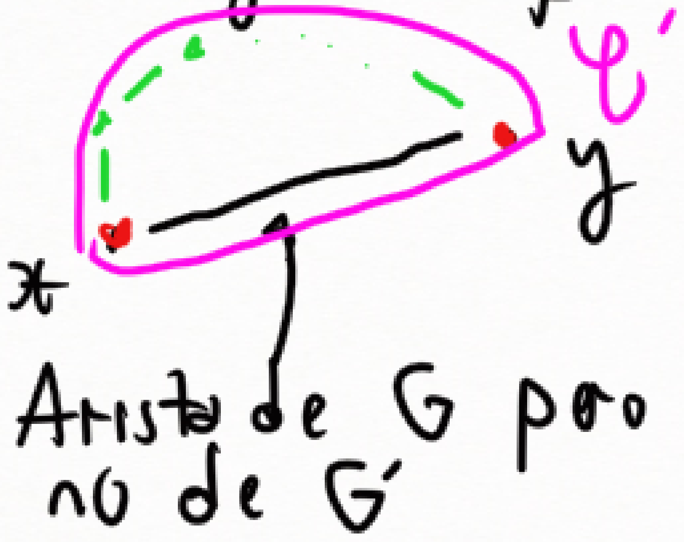
G' árbol $\Rightarrow$ lo coloreamos con dos colores por el lema.

Quiero usar la coloración de G' para G. ¿Qué podría salir mal?

- Que haya una arista de G, que no esté en G' entre dos vértices de igual color.

Vamos a ver que no puede pasar

Supongamos que hay una arista entre dos vértices rojos



G' árbol $\Rightarrow$ conexo

$\Rightarrow$ existe en G' camino simple $\mathcal{C}$ que une x e y

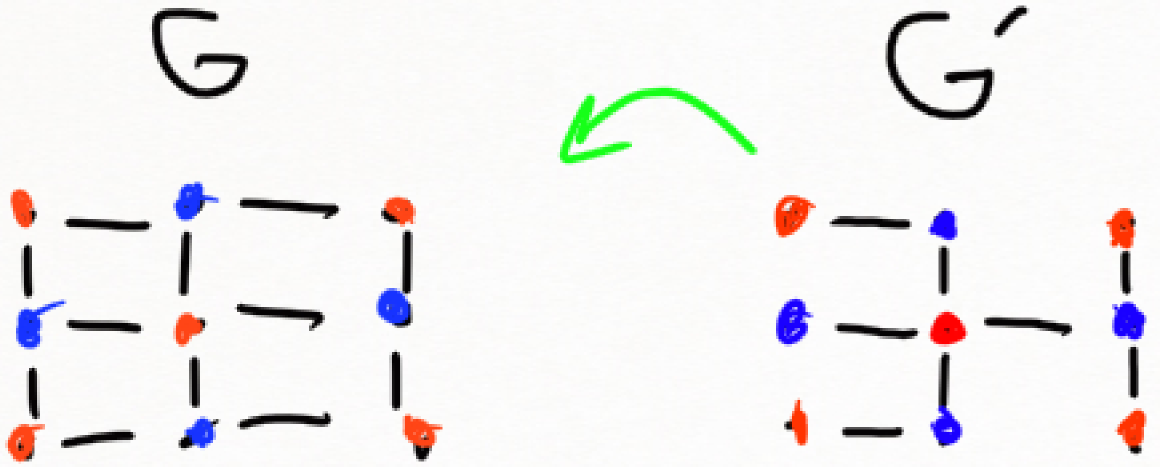
$\mathcal{C}$ tiene largo par porque va de un rojo a un rojo a otro rojo.

$\mathcal{C}'$ tiene el largo de $\mathcal{C}+1 \Rightarrow$ impar. $\boxed{\text{Abs}}$

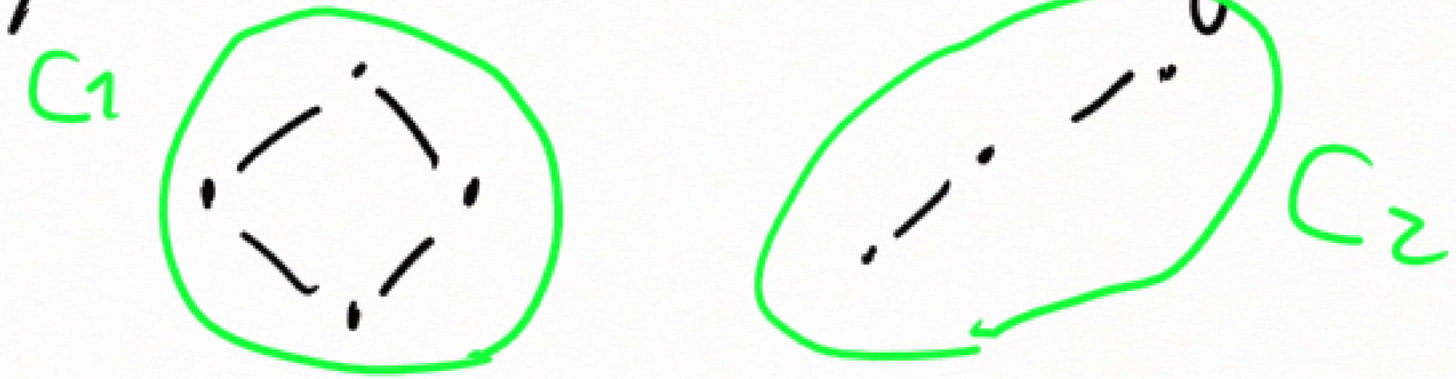
Supusimos que hay una arista entre dos vértices del mismo color y llegamos a una contradicción $\Longrightarrow$ No hay aristas entre vértices de igual color

$\Longrightarrow$ Logramos colorear G con 2 colores $\Longrightarrow$ $\chi(G) = 2$

Asumimos que con 1 color no se puede.



¿Qué hacemos si G no es conexo?
Hacemos lo mismo en cada componente conexa y con eso coloreamos el grafo.

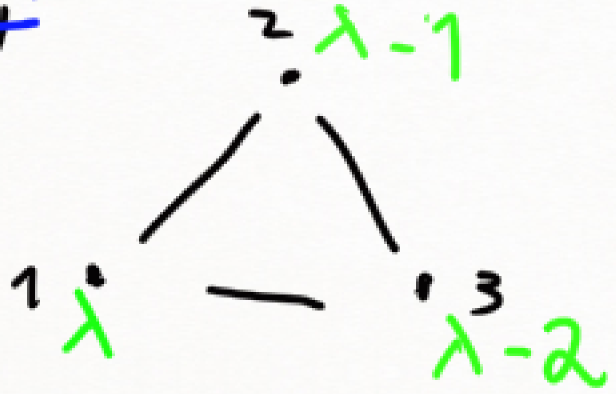


Polinomio cromático

Si disponemos de λ colores distintos ¿de cuántas formas podemos colorear el grafo?

Para cualquier grafo, la respuesta es un polinomio en λ. $P_G(\lambda)$ o $P(G,\lambda)$

Ej: $K_3 = C_3$



Tenemos λ colores distintos.

¿De cuántas formas se lo puede colorear.

v_1 : λ colores disponibles

v_2 : no puede ser el color de $v_1 \Rightarrow \lambda - 1$

v_3 : no puede ser el de v_1 ni el de $v_2 \Rightarrow \lambda - 2$

$\neq$

Regla Prod: Se puede colorear de $\boxed{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = P_G(\lambda)}$ formas $\neq$

$P_G(5)$: cantidad de formas de colorearlo con 5 colores

$P_5(5) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$\chi(G)$: El mínimo $\lambda > 0$ tq G se puede colorear con λ colores

$\chi(G)$: El mínimo $\lambda > 0$ tq $P_G(\lambda) > 0$

$$\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N}\ \lambda > 0 \ / \ P_G(\lambda) > 0\}$$

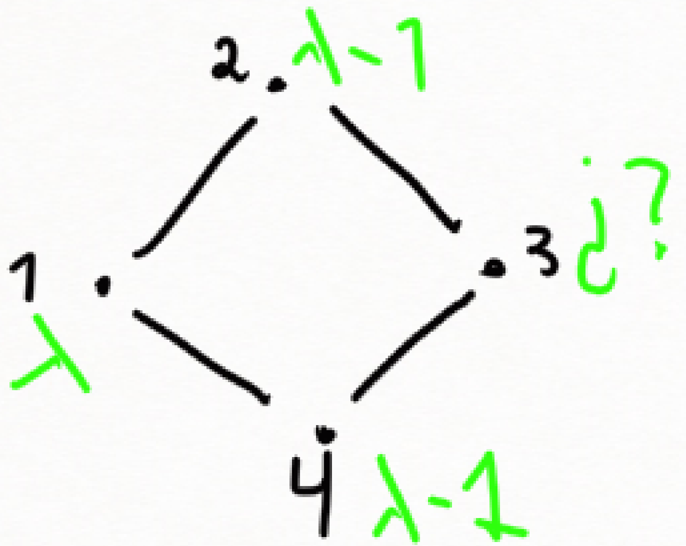
C_3

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$P_G(1) = 0 \qquad P_G(2) = 0 \qquad P_G(3) = 6 > 0$$

3 es el mínimo tq $P_G > 0 \implies \boxed{\chi(G) = 3}$

C_4



V_3: no puede tener el color del 2 ni el del 4.

si color del 2 = color del 4 $\Rightarrow$ $\lambda-1$ posibilidades

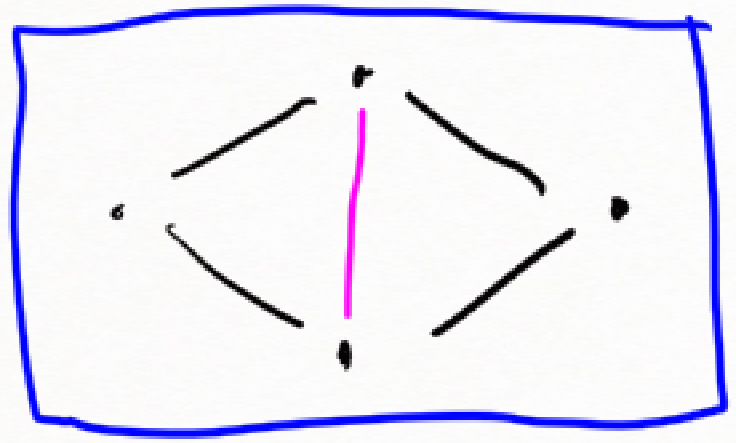
si color del 2 $\neq$ color del 4 $\Rightarrow$ $\lambda-2$ posibilidades

Para este grafo el método anterior no funciona y hay que hacer otra cosa.

Agregado de arista y contracción de vértice

Para C_4 separamos en 2 casos

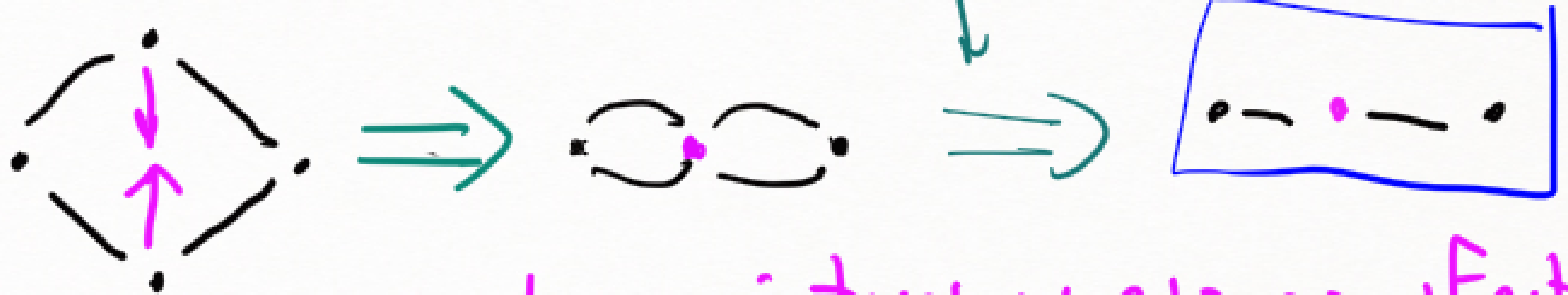
Caso 1: El 2 y el 4 tienen colores distintos



Podemos agregar esa arista y no afecta las coloraciones

Caso 2: El 2 y el 4 tienen igual color

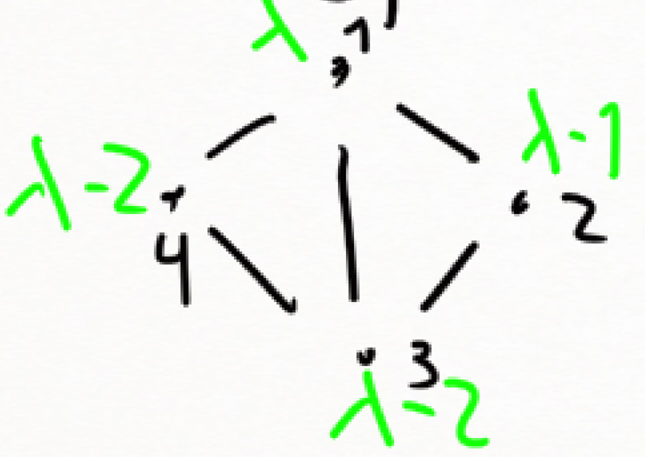
Sacamos aristas dobles



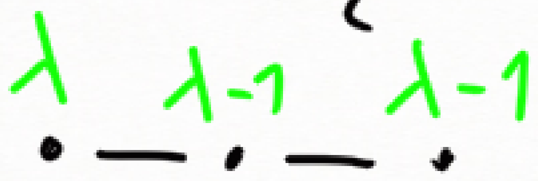
se fusionan los vértices y eso no afecta las coloraciones

Sumamos los casos $\boxed{P_{C_4}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) + P_{G_2}(\lambda)}$

G_1



G_2



$$P_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$$

$$P_{G_1}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_{C_4}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + \lambda(\lambda-1)^2 \\ &= \lambda(\lambda-1)\left((\lambda-2)^2+\lambda-1\right) \end{aligned}}$$

$$P_{C_4}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3)$$

General $\quad P_G(\lambda) = P_{G+e}(\lambda) + P_{G+uv} \Rightarrow P_{G+e}(\lambda) = P_G(\lambda) - P_{G+uv}(\lambda)$