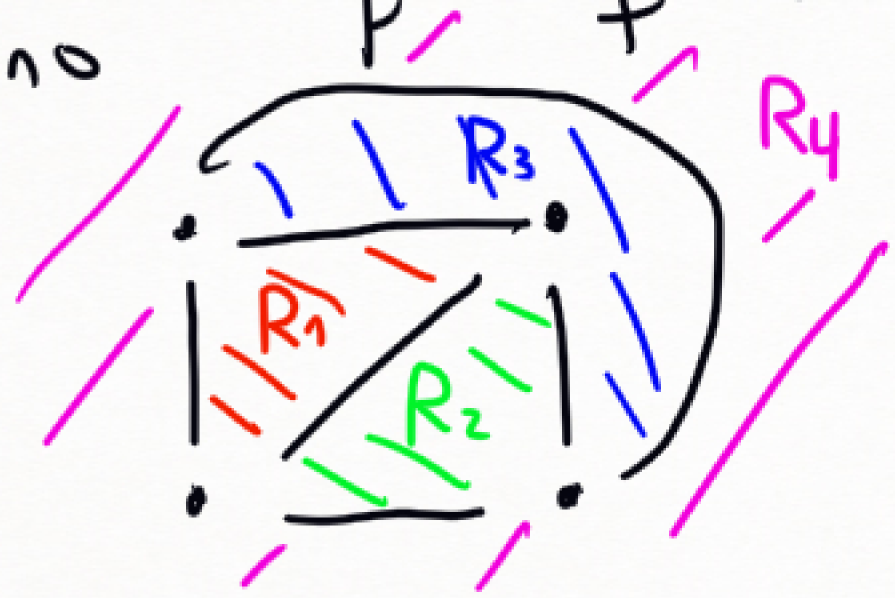
Regiones dado un grafo plano

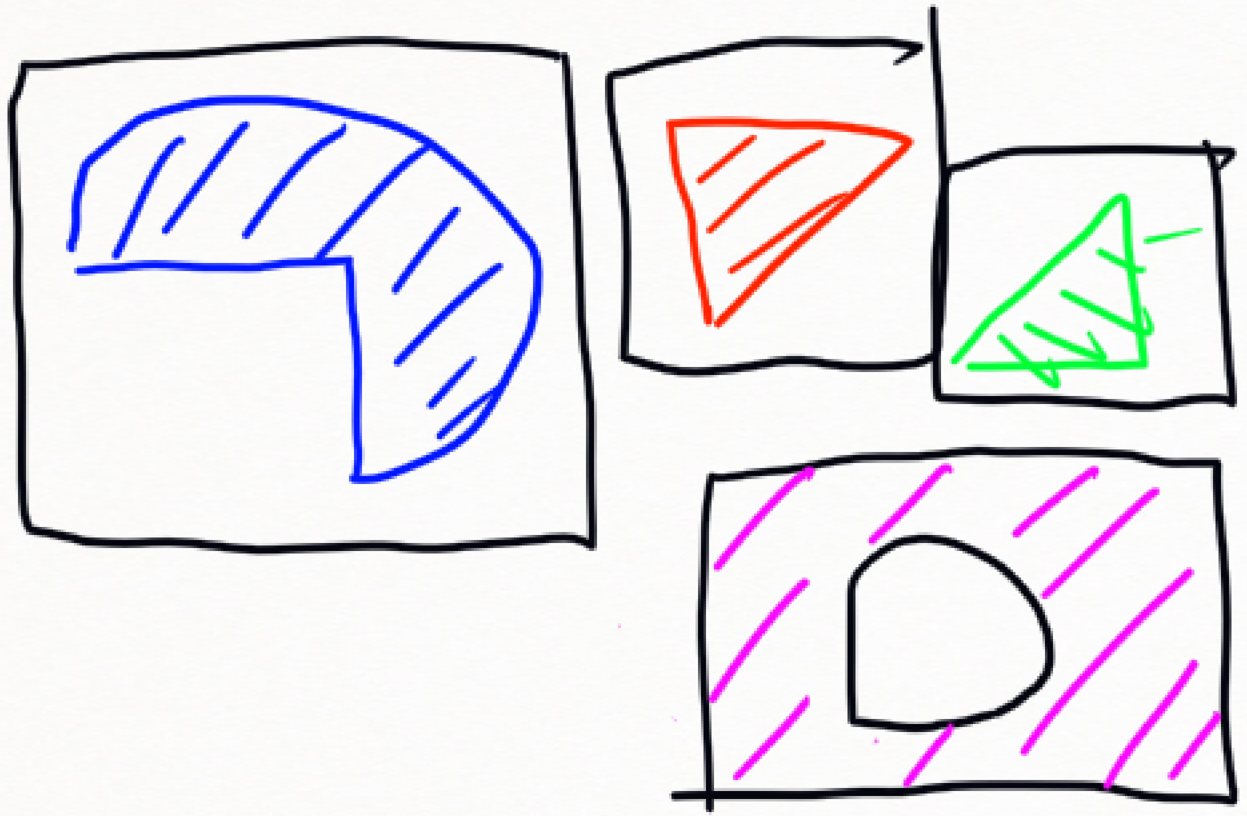
Regiones que quedan delimitadas por las aristas en una inmersión al plano

Las aristas no se deben cortar

K_4



R_4 : región infinita



Para cualquier inmersión, la cantidad de regiones es la misma: 4.

Verifiquemos que se cumple la fórmula de Euler.

$$\underset{v}{4} - \underset{e}{6} + \underset{r}{4} = 2 \checkmark$$

Fórmula de Euler

$G=(V,E)$ grafo conexo y plano.

$v :=$ cant de vértices

$e :=$ cant de aristas

$r :=$ cant de regiones que genera en el plano

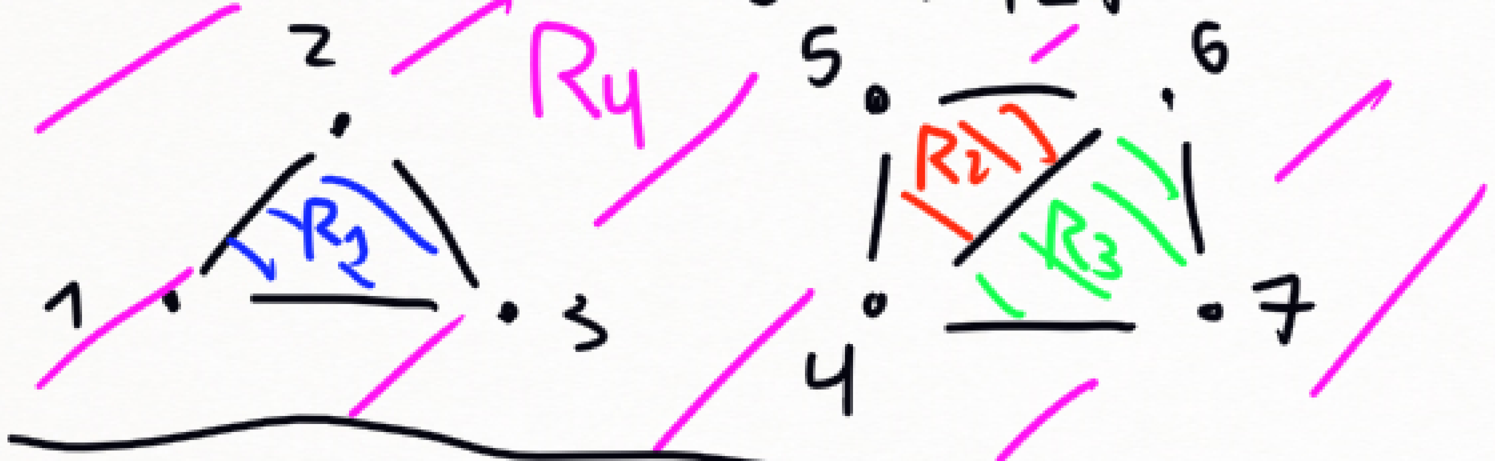
$$\Rightarrow \boxed{v - e + r = 2}$$

hecho en clase (1/2) → Generalización Ej 4

$G=(V,E)$ plano $\Rightarrow$

$$v - e + r = \underbrace{\kappa(G)}_{\text{cant de componentes conexas}} + 1$$

$G=(V,E)$ $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $K(G)=2$

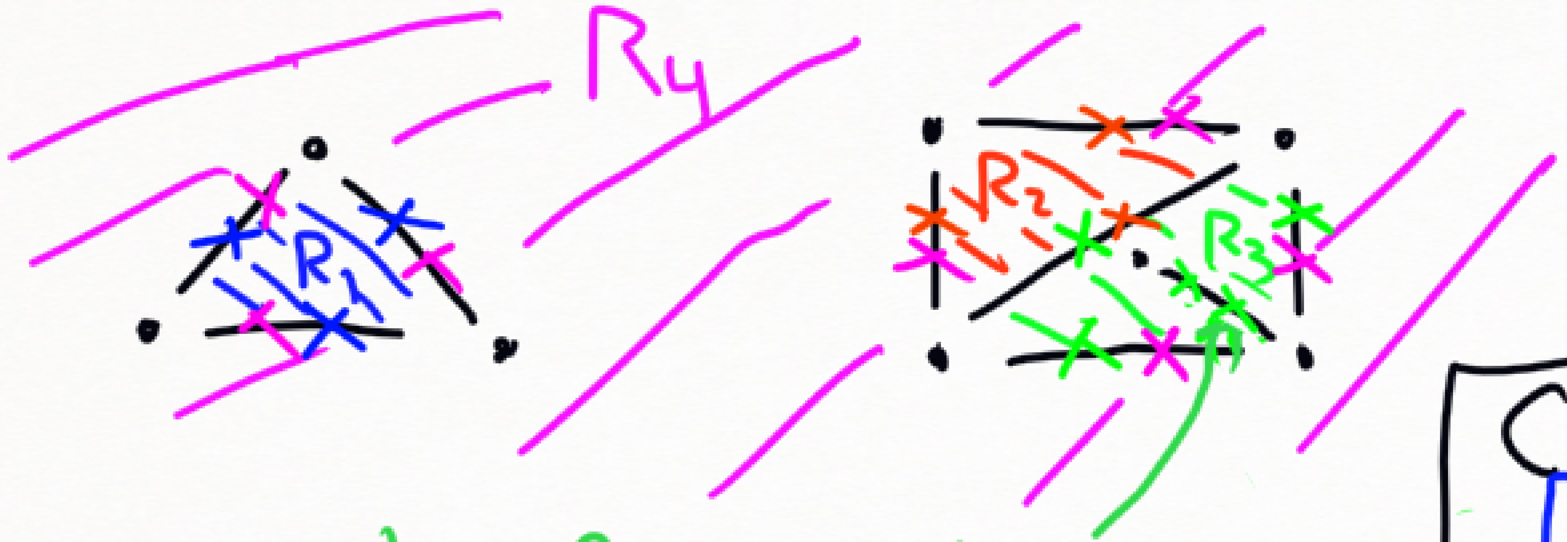


$$v - e + r = K(G)+1$$

$$7-8+4 = 2+1$$

Grado de región

El grado de una región es la cantidad de aristas que toca, contando dos veces las aristas que solo tocan esa región: $\sum_R gr(R) = 18 = 2\cdot 9$



cuenta 2 veces

$gr(R_1) = 3$ $gr(R_2) = 3$

$gr(R_3) = 5$ $gr(R_4) = 7$

Cada arista aporta 1 al grado de dos regiones

$$\boxed{\sum_R gr(R) = 2e}$$

$\boxed{10}$

Info:

$$\left[\begin{array}{l} v - e + r = \overset{\geq 1}{K(G)} + 1 \geq 2 \\ \sum_R gr(R) = 2e \\ r = 53 \\ \forall R \ gr(R) \geq 5 \end{array}\right.$$

} generales para grafos planos

Queremos probar que $v \geq 82$.

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 2e}}{\sum_R \overset{\geq 5}{gr(R)}} \geq \sum_R 5 = 53 \times 5 \implies 2e \geq 53 \times 5 \implies e \geq \frac{53 \times 5}{2}$$

$$\implies e \geq \frac{265}{2} = 132{,}5 \implies e \geq 133$$

$$v - e + r \geq 2 \implies v \geq 2 + e - r = 2 + e - 53 \geq 2 + 133 - 53$$

$$= 82$$

Homeomorfismo

G_1 es plano

$\Updownarrow$

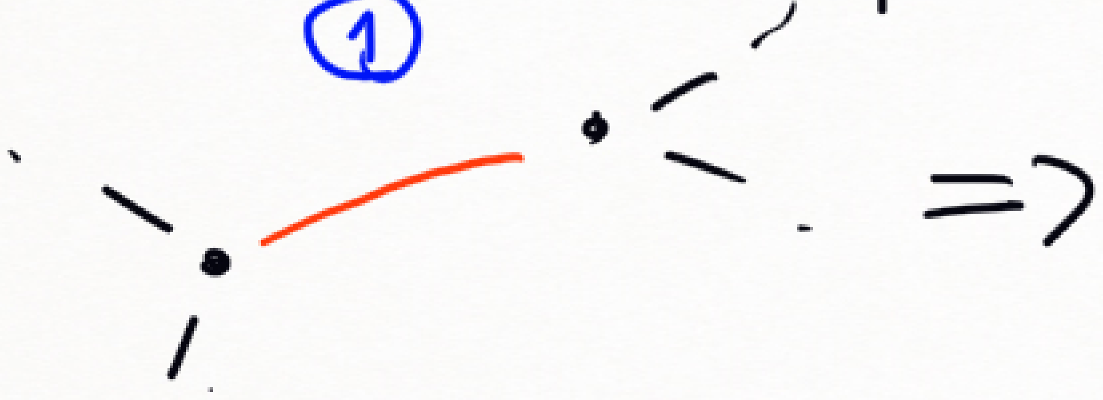
G_2 es plano

G_1 y G_2 son grafos homeomorfos

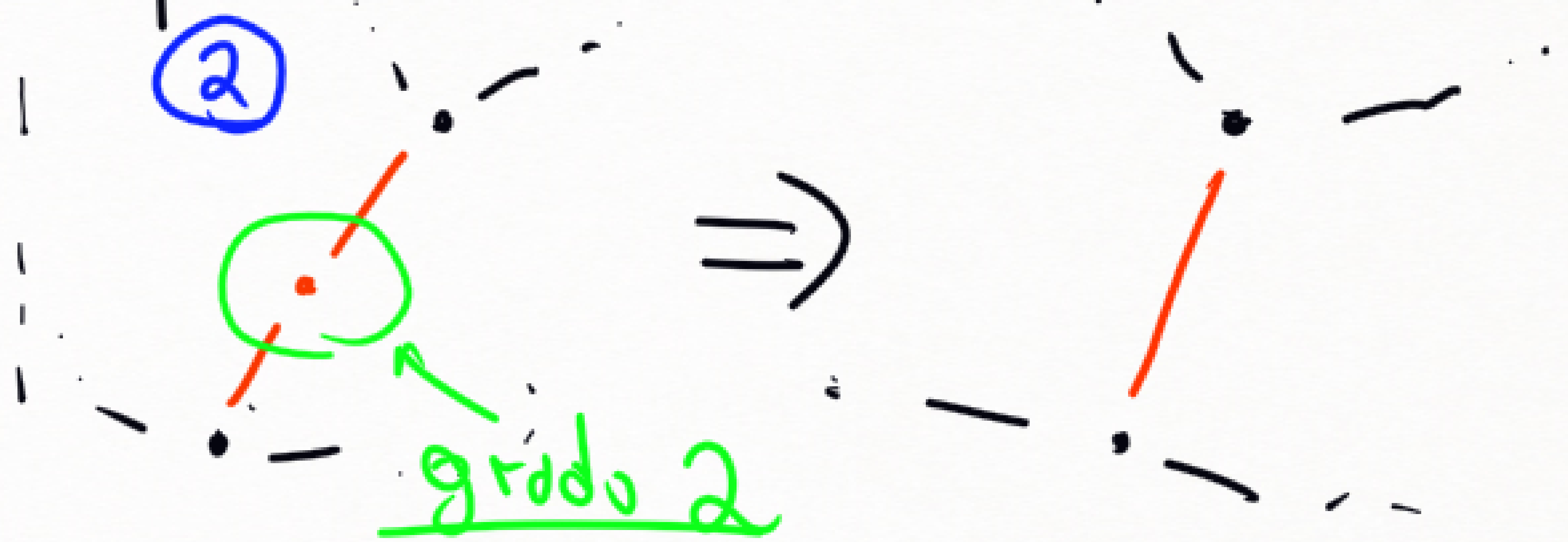
Def Formal: video 2/2 de Claudio

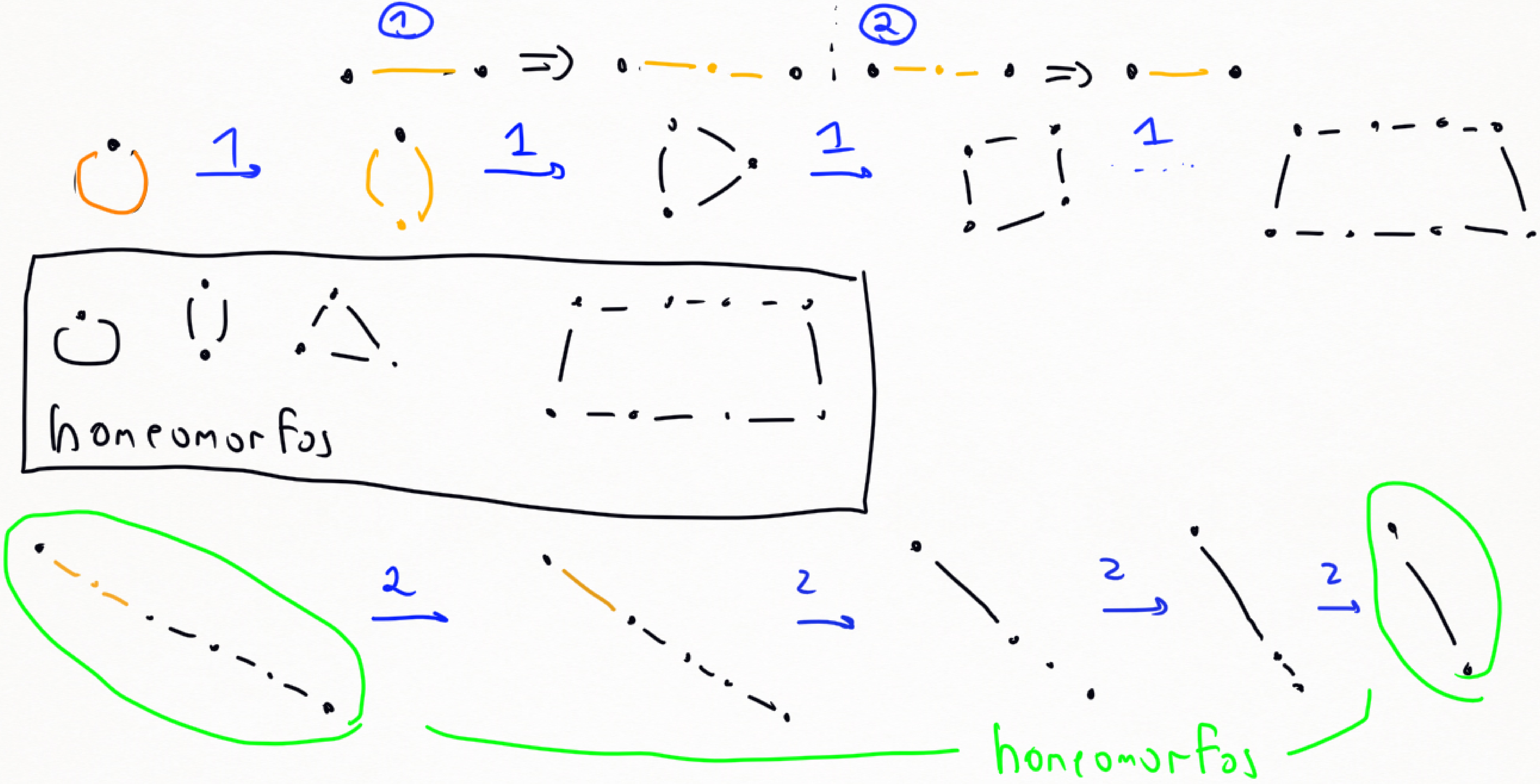
Dos grafos son homeomorfos si se puede transformar uno en el otro realizando dos operaciones

1

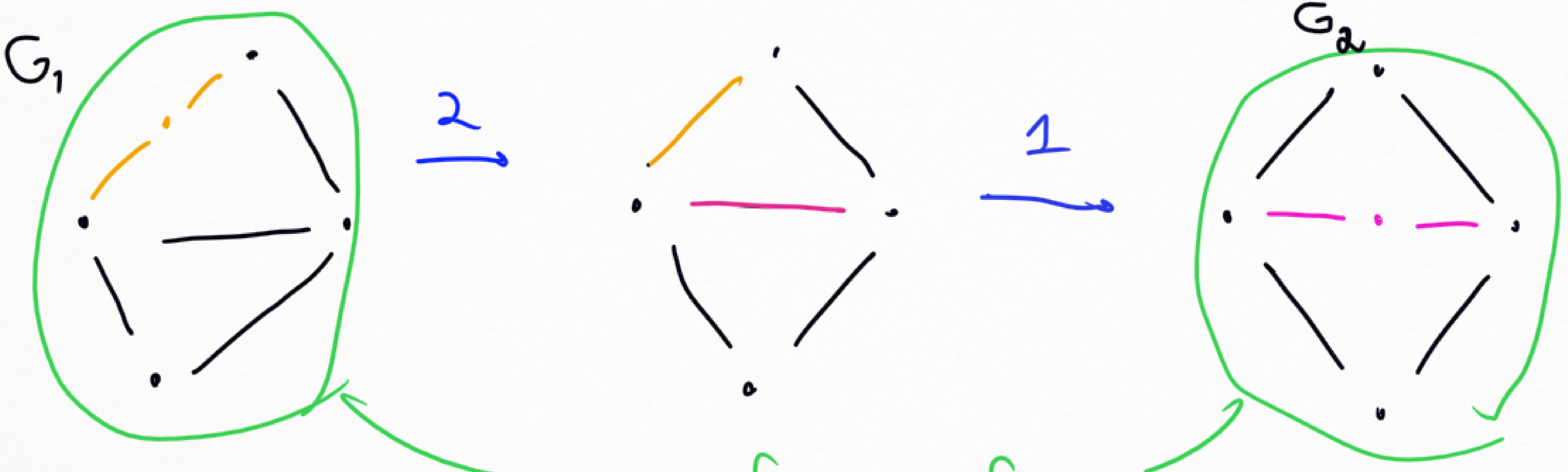


2





1
2
1
1
1
1
homeomorfos
2
2
2
2
homeomorfos



son homeomorfos entre sí

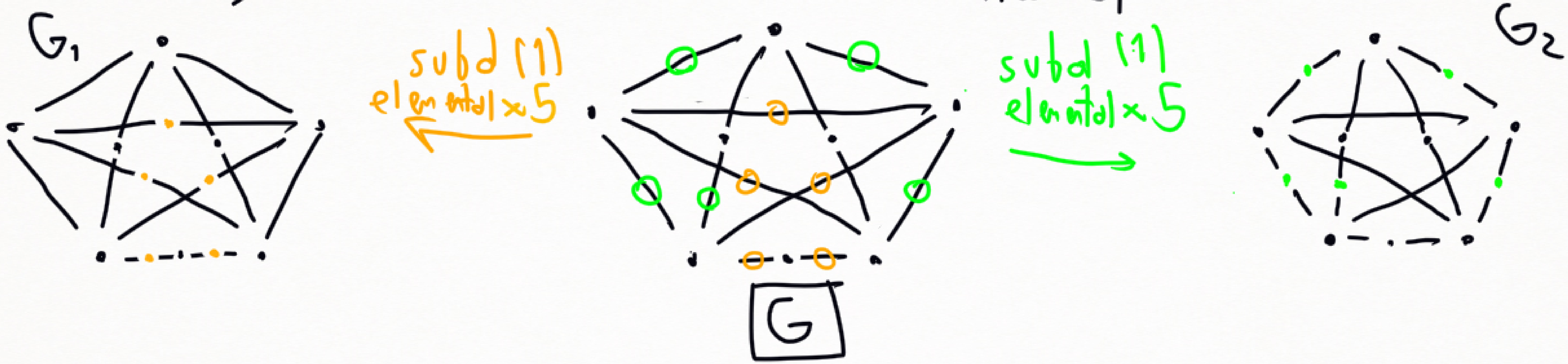
Obs

son operaciones "inversas"

③

La "operación 1" se llama subdivisión elemental 

⟹ son homeomorfos (lo verificamos)



$$\boxed{2e = \sum_{v \in V} gr(v) \geqslant \sum_{v \in V} 5}$$

$$\Rightarrow \boxed{2e \geqslant 5v} \Rightarrow \boxed{e \geqslant^{*} \frac{5}{2}v}$$

G plano $\Rightarrow \boxed{e \leqslant 3v - 6}$

$$\boxed{3v-6 \geqslant e \geqslant \frac{5}{2}v} \underset{\text{transit}}{\Longrightarrow} \boxed{3v-6 \geqslant \frac{5}{2}v}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{2} \geqslant 6 \Rightarrow \boxed{v \overset{*}{\geqslant} 12}$$

si $\forall v \; gr(v) \geqslant 5$, G plano $\Rightarrow e \geqslant 30$

$$\Rightarrow \boxed{e \geqslant \frac{5}{2} \cdot 12 = 30}$$

(d)

$e \leq 3v - 6$

$e' \leq 3v - 6$

$+$

$\frac{v(v-1)}{2} \leq 6v - 12$

$\frac{v^2}{2} - \frac{v}{2} \leq 6v - 12 \iff v^2 - v \leq 12v - 24$

$\iff v^2 - 13v + 24 \leq 0$

$\iff 2 < v < 11$ ↯

$e' = C_2^{11} - e \Rightarrow e + e' = C_2^{11} = 55$

$e + e' = \frac{v(v-1)}{2}$

2,2, 10,8