Inducción completa

- Ind. comp. no es una "cuenta", es un método de demostración
- Ind comp. es un método que se utiliza para probar/demostrar que una propiedad se cumple para todos los números naturales.

$P(n)$: "El número n cumple la propiedad P"

$P(0)$: 0 cumple la propiedad $P(1)$: 1 cumple . . . etc

Inducción completa

Si se cumplen: 1) $P(0)$ (Paso base)

2) si $P(n)$ entonces $P(n+1)$

$(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

(Paso Inductivo)

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; P(n)$

Para todo n natural se cumple $P(n)$

1) $P(0)$

$P(0)$, 2) $P(1)$

$P(1)$, 2) $P(2)$

$P(2)$, 2) $P(3)$

⋮

Ejemplo: Análogo al ej 4

Probar que $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5 $\forall n \geq 1$ → para todo

· $\boxed{P(n):\ 8^n - 3^n \text{ es múltiplo de } 5}$ Queremos probar $\forall n \geq 1$ $P(n)$

Hay que probar 2 cosas (PB) $\boxed{P(1)}$ $8-3$ es múltiplo de 5

(PI) Asumir $P(n)$ y probar $P(n+1)$

PB - $8-3$ es múltiplo de 5 $\quad 8-3 = 5 = 5 \times 1$ ✓

($P(0)$ tb se cumple xq $8^0 - 3^0 = 1-1 = 0 = 5 \times 0$)

PI - Hay que probar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ Implica

HI: $P(n)$ $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5 ← Lo que asumimos

TI: $P(n+1)$ $8^{n+1} - 3^{n+1}$ es múltiplo de 5 ← Lo que queremos probar

HI: $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5 ← Asumimos

TI: $8^{n+1} - 3^{n+1}$ es múltiplo de 5 ← A lo que queremos llegar

Dem

$$8^{n+1} - 3^{n+1} = 8 \times 8^n - 3 \times 3^n$$

$$= (5+3) \times 8^n - 3 \times 3^n$$

distributiva → $= 5 \times 8^n + 3 \times 8^n - 3 \times 3^n$

sacar factor común → $= \underbrace{5 \times 8^n}_{\text{múltiplo de 5}} + 3 \times \underbrace{(8^n - 3^n)}_{\text{es múltiplo de 5 por la HI}}$

$(5+3) \times 8^n = 5 \times 8^n + 3 \times 8^n$

$3 \times 8^n - 3 \times 3^n = 3 \times (8^n - 3^n)$

suma de múltiplos de 5 da otro múltiplo de 5

$\square$ ← significa "Fin de prueba"

$$\boxed{8^{a+b} = 8^a 8^b \qquad 8^{n+1} = 8^n \times 8^1}$$

$$8^{m+1} - 3^{m+1} \overset{\text{cuentas}}{=} \cdots = 5 \times 8^{m} + 3 \times (8^{m} - 3^{m})$$

Nuestro objetivo es probar que es múltiplo de 5.

5×8^{m} es múltiplo de 5

Lo otro que precisamos es ver que $3 \times (8^{m} - 3^{m})$ es múltiplo de 5.

Por HI $8^{m} - 3^{m}$ es múltiplo de 5 $\Rightarrow 3 \times (8^{m} - 3^{m})$ es múltiplo de 5

Como probamos $P(1)$ y también probamos que $P(m) \Rightarrow P(m+1)$, podemos concluir que $\forall m \geq 1$ se cumple $P(m)$

Ejercicio: Hacer el 4 que es casi lo mismo

2 - OF2013 (una forma por inducción)

5 - OF2021-2 por ind. fuerte OF2013 análogo con 3 y 8

9 - OF2013

3 - OF2021-2 análogo $2^n > n^2 + 1$