

Inducción completa

Queremos probar por ind. completa que la propiedad $P(n)$ se cumple para todo $n \geq n_0$

(PB) $P(n_0)$

(PI)

(H)

$P(n)$

(I)

$P(n+1)$

$\forall n \geq n_0$

(asumir $P(n)$ y probar $P(n+1)$)

En el PI trabajamos con una variable n genérica pero $\geq n_0$

El razonamiento usado en el PI debe ser válido para todo $n \geq n_0$

$$P(n): 2^n \geq n^2$$

$$P(0) \checkmark$$

$$2^0 \geq 0^2$$

$$P(1) \checkmark$$

$$2^1 \geq 1^2$$

$$P(2) \checkmark$$

$$2^2 \geq 2^2$$

$$P(3) \times$$

$$2^3 \geq 3^2$$

8 9

$$P(4) \checkmark$$

$$2^4 \geq 4^2$$

Vamos a hacer como si no vimos que P(3) no se cumple y tratar de probarlo con $m_0 = 0$ (no vamos a poder)

(PB) P(0) ✓

(PI) (H) $P(m): 2^m \geq m^2$ (I) $P(m+1): 2^{m+1} \geq (m+1)^2$

$\forall m \geq 0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

Dem

$$(H) 2^m \geq m^2 \xrightarrow{\times 2} \underbrace{2 \times 2^m}_{2^{m+1}} \geq 2m^2 \quad (2^{m+1} = 2^m \times 2^1 = 2^m \times 2)$$

$a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq c$ (transitividad)

tenemos: $2^{m+1} \geq 2m^2 \geq (m+1)^2$

queremos que se cumpla

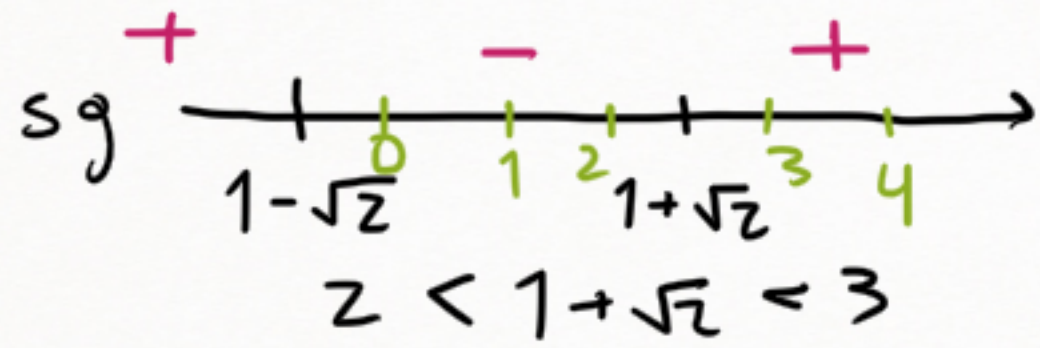
$$2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$$

Para que este razonamiento funcione, precisamos $2m^2 \geq (m+1)^2$

$$\Leftrightarrow 2m^2 \geq m^2 + 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 \geq 0$$

condición para que el PI funcione.



$m^2 - 2m - 1 \geq 0$ se cumple para $m \geq 3$
 $\Rightarrow$ El PI es válido para $m \geq 3$

Principio de Ind: $\begin{cases} \text{EI } \textcircled{PB} \text{ se debe cumplir en } m_0 & P(m_0) \text{ (1)} \\ \text{EI } \textcircled{PI} \text{ debe ser v\u00e1lido para todo } m \geq m_0 & \text{(2)} \end{cases}$

$\rightarrow m_0 = 0$ $\times$

Se cumple (1), o sea $P(m_0)$, pero no se cumple (2)

$\rightarrow m_0 = 3$ $\times$

Como (PI) es v\u00e1lido $\forall m \geq 3$, se cumple (2)

Por otra parte, no se cumple $P(3)$, por lo que falla (1)

$\rightarrow m_0 = 4$ $\checkmark$

(1) se cumple, porque $P(4)$

(2) tambi\u00e9n se cumple. PI sirve con $m \geq 3$

en particular, si $m \geq 4 \Rightarrow m \geq 3$ y sirve el PI

Inducción Fuerte

Ⓟ $P(0)$

Ⓟ $\textcircled{H} \forall k < n, P(k) \quad \textcircled{I} P(n)$
válido $\forall n \geq 0$

Ⓟ $P(5)$

Ⓟ $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4)$

Ⓟ $P(n)$

Ⓟ $P(0), P(1), \dots, P(n-2), P(n-1)$

Inducción fuerte con m_0

Ⓟ $P(m_0)$

Ⓟ $\textcircled{H} P(k)$ para todo k tq $m_0 \leq k < n$
Ⓟ $P(n)$
válido $\forall n \geq m_0$

$m_0 = 2$

Ⓟ $P(5)$

Ⓟ $P(2), P(3), P(4)$

Ⓟ $P(n)$

Ⓟ $P(2), P(3), \dots, P(n-2), P(n-1)$

Ej 6

④ $m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3 = 9 \times k_1$ ⑤ $(m+1)^3 + (m+2)^3 + (m+3)^3 = 9 \times k_2$

$(m+1)^3$ + $((m+1)+1)^3$ + $((m+2)+1)^3$ =

$$\begin{aligned} ((m+1)+1)^3 &= \underline{(m+1)^3 + 3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1} \\ ((m+2)+1)^3 &= \underline{(m+2)^3 + 3(m+2)^2 + 3(m+2) + 1} \\ (m+1)^3 &= \underline{m^3 + 3m^2 + 3m + 1} \end{aligned}$$

= $m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3$ + $3(m+1)^2 + 3(m+2)^2 + m^2 + m+1 + m+2 + m+1$

↑
múltiplo de 9 por H

resta ver que es múltiplo de 9

$$3 \left((m+2)^2 + (m+1)^2 + m^2 + m+2 + m+1 + m+1 \right)$$

$$3 \left(\cancel{m^2} + \cancel{4m} + \cancel{4} + \cancel{m^2} + \cancel{2m} + \cancel{1} + \cancel{m^2} + \cancel{m} + \cancel{2} + \cancel{m} + \cancel{1} + \cancel{m} + \cancel{1} \right)$$

$$3 \left(3m^2 + 9m + 9 \right)$$

$$= \underbrace{3 \times 3}_9 \times (m^2 + 3m + 3)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$