

Inducción completa

$P(n)$: Propiedad sobre el número natural n

Si probamos que se cumple $P(0)$ Paso base (PB)
y que si se cumple $P(n)$ entonces se cumple $P(n+1)$ $\Rightarrow$ $\forall n \geq 0$ se cumple $P(n)$

para todo

Paso inductivo (PI)

Por PB $P(0)$ $\xrightarrow{PI: P(0) \Rightarrow P(1)}$ $P(1)$ $\xrightarrow{PI: P(1) \Rightarrow P(2)}$ $P(2) \rightarrow \dots$

1) $P(0)$ (PB)

2) Dado $n \geq 0$ si $P(n)$ entonces $P(n+1)$ (PI)

$P(0) \Rightarrow P(1)$

$P(1) \Rightarrow P(2)$

$\vdots$
 $P(50) \Rightarrow P(51)$

PI si $P(n)$ entonces $P(n+1)$

I $P(n)$ I $P(n+1)$

Ejemplo (caso Ej 4): $\forall n \geq 0$ $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5

$P(n)$: $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5.

PB $P(0)$: $8^0 - 3^0$ es múltiplo de 5

$$8^0 - 3^0 = 1 - 1 = 0 = 5 \times 0 \quad \checkmark$$

PI $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ H $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5 I $8^{n+1} - 3^{n+1}$ es múltiplo de 5

De

$$8^{n+1} - 3^{n+1} = \underline{8} \times 8^n - 3 \times 3^n \quad \left(8^{a+b} = 8^a \times 8^b \quad 8^{n+1} = 8^n \times 8^1 \right)$$

$$= (5 + 3) \times 8^n - 3 \times 3^n$$

$$= 5 \times 8^n + \underline{3} \times 8^n - \underline{3} \times 3^n \quad \leftarrow \text{distributiva}$$

$$= 5 \times 8^n + \underline{3} \times (8^n - 3^n) \quad \leftarrow \text{Factorizar}$$

$$[3 \times 8^n - 3 \times 3^n = 3(8^n - 3^n)]$$

$\rightarrow 5 \times 8^n$ es múltiplo de 5

$\rightarrow 3 \times (8^n - 3^n)$ es múltiplo de 5. Por HI $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5

$$8^{n+1} - 3^{n+1} \stackrel{\text{cuenta}}{=} \underbrace{5 \times 8^n}_{\text{mult 5}} + \underbrace{3 \times (8^n - 3^n)}_{\text{mult 5 por (H)}}$$

$3 \times (8^n - 3^n)$ también es múltiplo de 5
 x último: Sumar múltiplos de 5 da múltiplo de 5.

Demostremos 2 cosas: $\text{(PB)} P(0)$
 $\text{(PI)} \text{ si se cumple } P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\text{(PB)} P(0)$
 $P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \dots$
 (PI)

$P(0) \Rightarrow P(1)$
 $P(1) \Rightarrow P(2)$
 $P(2) \Rightarrow P(3)$
 $\vdots$

- 2 - OF2013
- 3 - OF2021-1 análogo $2^n > n^2 + 1$
- 5 - OF2021-2 inducción Fuerte; OF2013 análogo 3,8.
- 9 - OF2013 (creo que también en 2021-2)

$$2^m \geq m^2$$

$$\forall m \geq m_0$$

$$2^0 \geq 0$$

$$2^1 \geq 1^2$$

$$2^2 \geq 2^2$$

$$2^3 \geq 3^2$$

$$2^4 \geq 4^2$$

✓

✓

✓

✗

✓

✓

✓

...

(PB)

$$2^4 \geq 4^2$$

$$16 \geq 16 \quad \checkmark$$

(PI)

(H)

$$2^m \geq m^2$$

(I)

$$2^{m+1} \geq (m+1)^2$$

$$2^{m+1} = 2 \times 2^m = 2^m + 2^m$$

De

$$(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$$

$$2^{m+1} \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$2^m + 2^m \geq m^2 + 2m + 1$$

$$\begin{aligned} 2^2 + 2^2 &= 4 + 4 = 8 \\ 2^3 &= 8 \end{aligned}$$

$$(\text{por HI } 2^m \geq m^2)$$

$$\Leftrightarrow 2^m \geq 2m + 1$$

esto se cumple con $m \geq 3$

como el paso base es 4, siempre usamos $m \geq 4 \quad \checkmark$

El PI Funciona si

$$2^m \geq 2m + 1$$

$$\boxed{\text{Si } m \geq 3}$$

Vamos a hacer otra inducción para probar que $\forall m \geq 3 \quad 2^m \geq 2m + 1$

(PB) $2^3 \geq 2 \cdot 3 + 1 \quad \checkmark \quad 8 \geq 7$

(PI) $\textcircled{H} \quad 2^m \geq 2m + 1 \quad \textcircled{T} \quad 2^{m+1} \geq 2(m+1) + 1$

Der

$$2^{m+1} = 2^m + 2^m \geq 2m + 1 + 2m + 1 = 4m + 2$$

$$4m + 2 \geq \underbrace{2(m+1) + 1}_{2m+3} \quad \textcircled{H} \quad \Leftrightarrow 2m + 2 \geq 3 \quad \Leftrightarrow 2m \geq 1$$

Funciona para $m \geq 3 \quad \checkmark$

$P(0), P(1), P(2), P(4)$ haciendo la cuenta

PI) $P(3) \Rightarrow P(4)$ $\leftarrow$ no sirve
 $P(4) \Rightarrow P(5)$ $\leftarrow$ partimos de este
 $P(5) \Rightarrow P(6)$
...

Lo importante es que el PI no
se cumple con $n=2$
 $P(2) \Rightarrow P(3)$ no se cumple

