Práctico 4

jueves, 31 de marzo de 2022

Distribución binomial (ejercicio 5)

tenemos un experimento con probabilidad de exito p

repetimos este experimento n veces

X cuenta la cantidad de exitos en las n repeticiones del experimento

$$X \sim Bin(n, p)$$

n: cantidad de veces que repetimos el experimento

p: probabilidad del exito en un experimento

X toma valores en el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(k) = C^n_k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\underbrace{(\overset{1-p}{\underline{F}}\ \overset{p}{\underline{E}}\ \overset{1-p}{\underline{F}}\ \overset{p}{\underline{E}}, \dots, \overset{1-p}{\underline{F}})}_{\text{n repeticiones del experimento}}$$

veamos que p_X es efectivamente una fpp

hay que verificar:

- $p_X(k) \geq 0$ para todo k
- $\underbrace{P(\{0, 1, \dots, n\})}_{\underbrace{P(X=0)}_{p_X(0)} + \underbrace{P(X=1)}_{p_X(1)} + \dots + \underbrace{P(X=n)}_{p_X(n)}} = 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1}$$

vamos a probar que $\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1 \quad \checkmark$$

binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$

$$(a+\underline{b})(\underline{a}+b)(a+\underline{b}) \cdots (a+\underline{b})$$

E F E F

$\underline{M_1}$ $\underline{M_2}$ $\underline{M_3}$ $\underline{M_4}$ $\underline{M_5}$

3. Un trabajador controla 5 máquinas de un mismo tipo. La probabilidad de que una máquina requiera la atención del trabajador en el lapso de una hora es 1/3. Calcular la probabilidad de que, en el curso de una hora, el trabajador sea requerido por:

(a) 2 máquinas;

(b) no menos de 2 máquinas.

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

X cuenta cuantas máquinas requieren atención

$$X \sim Bin(5, 1/3) \rightsquigarrow p_X(k) = C_k^5 \left(\tfrac{1}{3}\right)^k \left(\tfrac{2}{3}\right)^{5-k}$$

a) P(requerido por dos máquinas) $= P(X=2)$

$$= p_X(2)$$

$$= C_2^5 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \left(\tfrac{2}{3}\right)^3$$

b) P(requerido por no menos de dos máquinas) $= P(X \geq 2)$

$$= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0)$$

$$= 1 - p_X(1) - p_X(0)$$

$$= 1 - C^5_1 \, \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 - C^5_0 \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

2. En la trasmisión de un mensaje compuesto por signos, la probabilidad de que ocurra un error en un signo es 0,1. Calcular la probabilidad de que, en un mensaje con 4 signos:

   (a) no hayan errores;

   (b) ocurra un error;

   (c) ocurra no menos de un error.

$\_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_$

X cuenta los errores que hay en el mensaje

$$X \sim Bin(4, 0{,}1) \longrightarrow P_X(k) = C^4_k (0{,}1)^k (0{,}9)^{4-k}$$

a) $P(\text{no haya errores}) = P(X=0)$

$$= P_X(0)$$

$$= C^4_0 (0{,}1)^0 (0{,}9)^{4-0}$$

$$= 0{,}9^4$$

b) $P(\text{ocurre un error}) = P(X=1)$

$$= P_X(1)$$

$$= C^4_1 (0{,}1)^1 (0{,}9)^3$$

c) $P(\text{ocurre no menos de un error}) = 1 - P(\text{no ocurre ningún error})$

$$= 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - P_X(0)$$

$$= 1 - 0{,}9^4$$

Distribución hipergeométrica (ejercicio 7)

D rojas
N-D no rojas

N bolillas

sacamos n bolillas

nos interesa cuantas de las n bolillas son rojas

X cuenta la cantidad de bolillas rojas que hay en las n que sacamos

$$X \sim HG(\underset{\substack{\text{cantidad}\\ \text{total de}\\ \text{bolillas}}}{N}, \underset{\substack{\text{cantidad}\\ \text{de bolillas}\\ \text{rojas}}}{D}, n)$$

n: cantidad de bolillas que sacamos

vamos a calcular la fpp de X:

X toma valores en el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(k) = P(X=k) = \frac{CF}{CP} = \frac{C^D_k \, C^{N-D}_{n-k}}{C^N_n}$$

caso favorable $\underbrace{k \text{ rojas} \mid n-k \text{ no rojas}}_{\text{n bolillas que sacamos}}$

vamos a probar que P_X es efectivamente una fpp

- $P_X(k) \geq 0$ para todo k ✓

- $\sum_{k=0}^{n} P_X(k) = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} P_X(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k^D \cdot C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} C_k^D C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_k^D C_{n-k}^{N-D} \stackrel{?}{=} C_n^N}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n a^i b^{n-i}$$

$$\underbrace{(1+x)^N}_{\sum_{i=0}^{N} C_i^N x^i} = \underbrace{(1+x)^D}_{\sum_{k=0}^{D} C_k^D x^k} \underbrace{(1+x)^{N-D}}_{\sum_{j=0}^{N-D} C_j^{N-D} x^j}$$

el coeficiente de grado n en $(1+x)^N$ es: C_n^N

el coeficiente de grado n en $(1+x)^D(1+x)^{N-D}$ es: $\underbrace{C_0^D C_n^{N-D} + C_1^D C_{n-1}^{N-D} + C_2^D C_{n-2}^{N-D} + \dots}_{\sum_{k=0}^{n} C_k^D C_{n-k}^{N-D}}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} C_k^D C_{n-k}^{N-D} = C_n^N}$$

$$X \sim HG(N, D, n) \longrightarrow P_X(k) = \frac{C_k^D C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N}$$

2. Una empresa quiere comprar cajas que contienen 40 herramientas cada una. El procedimiento de control de calidad de cada caja consiste en tomar una muestra de 5 herramientas al azar de dicha caja y rechazarla si se encuentra una herramienta defectuosa. Si la caja a inspeccionar tiene 3 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la caja?

3 defectuosas
37 no defectuosas

40 herramientas

→ se toma una muestra de 5 herramientas y se rechaza la caja si alguna de las 5 es defectuosa

X cantidad de herramientas defectuosas en la muestra

$$X \sim HG(40, 3, 5) \longrightarrow P_X(k) = \frac{C^3_k \, C^{37}_{5-k}}{C^{40}_5}$$

$$\begin{aligned} P(\text{se rechaza la caja}) &= P(X \geq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - P_X(0) \\ &= 1 - \frac{C^3_0 \, C^{37}_5}{C^{40}_5} \end{aligned}$$

X' cuenta la cantidad de no defectuosas

$$X' \sim HG(40, 37, 5) \longrightarrow P_{X'}(k) = \frac{C^{37}_k \, C^3_{5-k}}{C^{40}_5}$$

$$\begin{aligned} P(\text{rechazar la caja}) &= P(X' < 5) \\ &= 1 - P(X' = 5) \\ &= 1 - P_{X'}(5) \\ &= 1 - \frac{C^{37}_5 \, C^3_0}{C^{40}_5} \end{aligned}$$