

Distribución binomial (ejercicio 5)

tenemos un experimento con probabilidad de éxito P
repetimos este experimento n veces

X cuenta la cantidad de éxitos en los n repeticiones del experimento

$$X \sim \text{Bin}(n, P)$$

cantidad de veces que repetimos el experimento \rightarrow
probabilidad del éxito en un experimento \leftarrow

X toma valores en el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$

$$P_x(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

$\begin{matrix} 1-P & P & 1-P & P & & & 1-P \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ \underline{F} & \underline{E} & \underline{F} & \underline{E} & \dots & & \underline{F} \end{matrix}$

n repeticiones del experimento

veamos que P_x es efectivamente una fpp

hay que verificar: • $P_x(k) \geq 0$ para todo k

$$\bullet \underbrace{P(\{0, 1, \dots, n\})}_{=} = 1$$

$$\underbrace{P(X=0)}_{P_x(0)} + \underbrace{P(X=1)}_{P_x(1)} + \dots + \underbrace{P(X=n)}_{P_x(n)}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n P_x(k) = 1}$$

^, ., 1

vamos a probar que $\sum_{k=0}^n P_x(k) = 1$

$$\sum_{k=0}^n P_x(k) = \sum_{k=0}^n C_k^n p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1 \quad \checkmark$$

binomio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}$

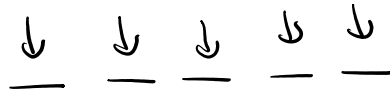
$$(a+b)(a+b)(a+b) \dots (a+b)$$



3. Un trabajador controla 5 máquinas de un mismo tipo. La probabilidad de que una máquina requiera la atención del trabajador en el lapso de una hora es $1/3$. Calcular la probabilidad de que, en el curso de una hora, el trabajador sea requerido por:

(a) 2 máquinas;

(b) no menos de 2 máquinas.



X cuenta cuantas máquinas requieren atención

$$X \sim \text{Bin}(5, 1/3) \rightsquigarrow P_x(k) = C_k^5 \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

$$\text{a) } P(\text{requerido por dos máquinas}) = P(X=2) = P_x(2)$$

$$= C_2^5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\text{b) } P(\text{requerido por no menos de dos máquinas}) = P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=1) - P(X=0)$$

$$= 1 - P_x(1) - P_x(0)$$

$$= 1 - C_1^5 \left(\frac{2}{3}\right)^4 - C_0^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

2. En la transmisión de un mensaje compuesto por signos, la probabilidad de que ocurra un error en un signo es 0,1. Calcular la probabilidad de que, en un mensaje con 4 signos:

- (a) no hayan errores;
- (b) ocurra un error;
- (c) ocurra no menos de un error.



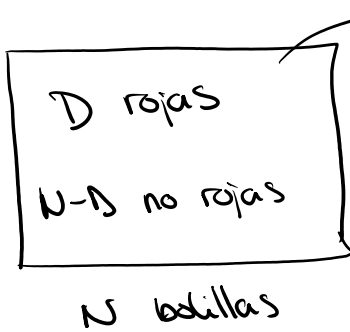
X cuenta los errores que hay en el mensaje
 $X \sim \text{Bin}(4, 0,1) \rightarrow P_X(k) = C_4^k (0,1)^k (0,9)^{4-k}$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{no haya errores}) &= P(X=0) \\ &= P_X(0) \\ &= C_0^4 (0,1)^0 (0,9)^{4-0} \\ &= 0,9^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(\text{ocurre un error}) &= P(X=1) \\ &= P_X(1) \\ &= C_1^4 (0,1)^1 (0,9)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(\text{ocurre no menos de un error}) &= 1 - P(\text{no ocurre ningún error}) \\ &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - P_X(0) \\ &= 1 - 0,9^4 \end{aligned}$$

Distribución hipergeométrica (ejercicio 7)



Sacamos n bolillas
 nos interesa cuantas de las n bolillas
 son rojas

X cuenta la cantidad de bolillas rojas que
 hay en las n que sacamos

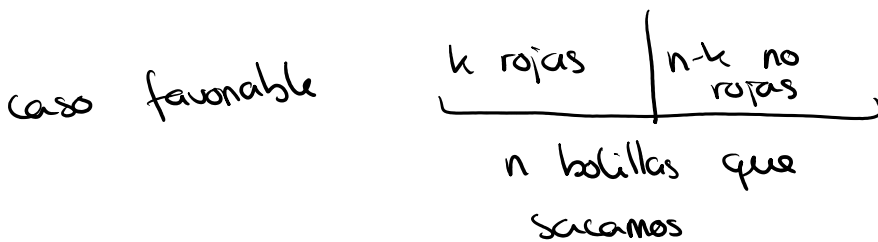
$$X \sim HG(N, D, n)$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 cantidad cantidad cantidad de bolillas
 total de de bolillas que sacamos
 bolillas rojas

Vamos a calcular la fpp de X :

X toma valores en el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$

$$P_X(k) = P(X=k) = \frac{CF}{CP} = \frac{C_k^D C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N}$$



Vamos a probar que P_X es efectivamente una fpp

- $P_X(k) \geq 0$ para todo k ✓

$$\bullet \sum_{k=0}^n P_X(k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^n P_X(k) = \sum_{k=0}^n \frac{C_k^D \cdot C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sum_{k=0}^n C_k^D C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n C_k^D C_{n-k}^{N-D} = C_n^N}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n a^i b^{n-i}$$

$$(1+x)^N = (1+x)^D (1+x)^{N-D}$$

$$\sum_{i=0}^N C_i^N x^i$$

$$\sum_{k=0}^D C_k^D x^k$$

$$\sum_{j=0}^{N-D} C_j^{N-D} x^j$$

el coeficiente de grado n en $(1+x)^N$ es: C_n^N

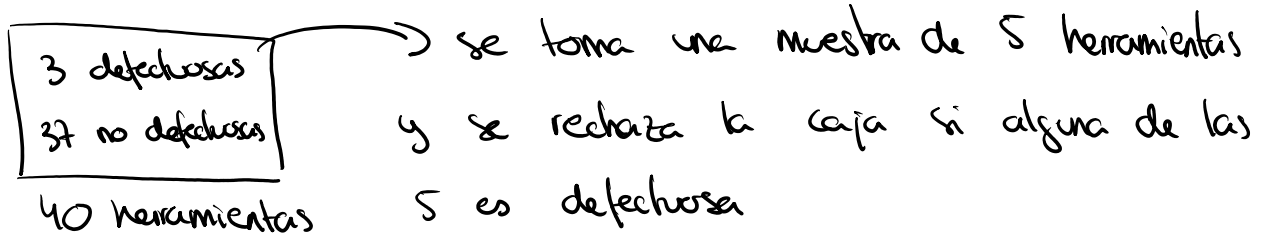
el coeficiente de grado n en $(1+x)^D (1+x)^{N-D}$ es: $C_0^D C_n^{N-D} + C_1^D C_{n-1}^{N-D} + C_2^D C_{n-2}^{N-D} + \dots$

$$\sum_{k=0}^n C_k^D C_{n-k}^{N-D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^n C_k^D C_{n-k}^{N-D} = C_n^N}$$

$$X \sim HG(N, D, n) \rightarrow P_X(k) = \frac{C_k^D C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N}$$

2. Una empresa quiere comprar cajas que contienen 40 herramientas cada una. El procedimiento de control de calidad de cada caja consiste en tomar una muestra de 5 herramientas al azar de dicha caja y rechazarla si se encuentra una herramienta defectuosa. Si la caja a inspeccionar tiene 3 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la caja?



X cantidad de herramientas defectuosas en la muestra

$$X \sim HG(40, 3, 5) \rightarrow P_X(k) = \frac{\binom{3}{k} \binom{37}{5-k}}{\binom{40}{5}}$$

$$\begin{aligned} P(\text{se rechaza la caja}) &= P(X \geq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - P_X(0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{37}{5}}{\binom{40}{5}} \end{aligned}$$

X' cuenta la cantidad de no defectuosas

$$X' \sim HG(40, 37, 5) \rightarrow P_{X'}(k) = \frac{\binom{37}{k} \binom{3}{5-k}}{\binom{40}{5}}$$

$$\begin{aligned} P(\text{rechazar la caja}) &= P(X' < 5) \\ &= 1 - P(X' = 5) \\ &= 1 - P_{X'}(5) \\ &= 1 - \frac{\binom{37}{5} \binom{3}{0}}{\binom{40}{5}} \end{aligned}$$