Práctico 4

martes, 29 de marzo de 2022

teníamos un experimento

→ Ω el espacio muestral = el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

→ P : Eventos → $[0,1]$ función de probabilidad

una variable aleatoria es una función

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X = k \iff \{\omega \in \Omega : X(\omega) = k\}$$

$$X < k \iff \{\omega \in \Omega : X(\omega) < k\}$$

<u>ejemplo</u>: tiro una moneda dos veces

$\Omega = \{CC, CN, NC, NN\}$

X cuenta cuantas veces sale cara

$X(CC) = 2$

$X(CN) = 1$

X toma valores en el conjunto $\{0,1,2\}$ ⇝ X variable aleatoria discreta

- función de probabilidad puntual fpp

$$P_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$P_X(x) = P(X = x)$$

en el ejemplo:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1/4 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

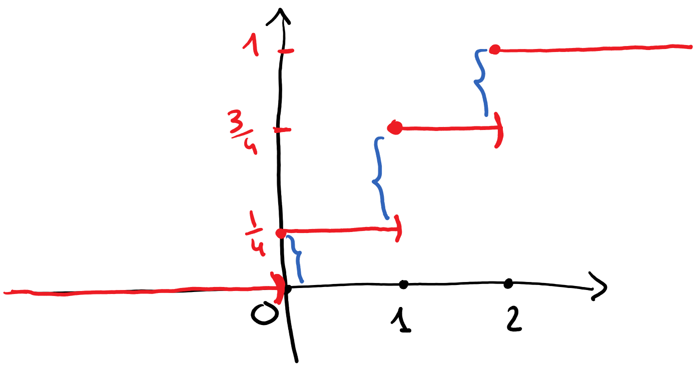
- función de distribución acumulada fda

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

en el ejemplo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



$$F_X(-1) = P(X \leq -1)$$

$$F_X(\tfrac{1}{2}) = P(X \leq 1/2) = P(X \leq 0)$$

$$F_X(1) = P(X \leq 1)$$
$$= P(X=1) + P(X=0)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$F_X(2) = P(X \leq 2) = 1$$
$$= P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)$$
$$= 1/4 + 1/2 + 1/4$$

. .

Propiedades de la función de distribución

① $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \qquad (P(\Omega) = 1)$

② $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad (P(\emptyset) = 0)$

③ F_X es creciente: si $x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$

$x \leq y \Rightarrow \{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$

④ F_X es continua por derecha: $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$

Ejercicio 1
Sea X una variable aleatoria (v.a.) que toma los valores $\{-2, -1, 1, \underbrace{1{,}5}, 5\}$ con probabilidades $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente. Graficar su función de distribución.

X toma valores en $\{-2, -1, 1, 3/2, 5\}$

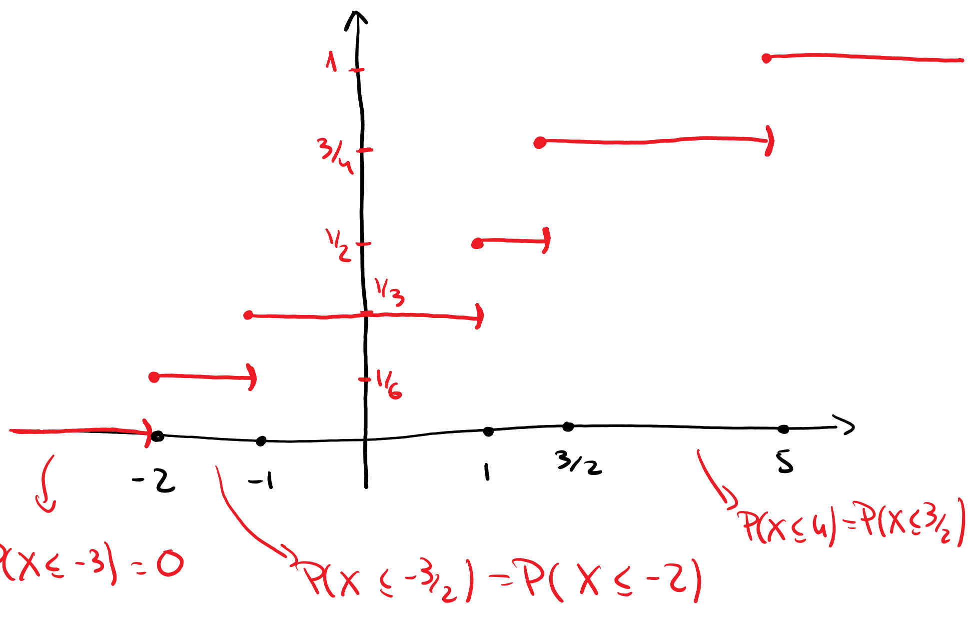
$P(X = -2) = 1/6$

$P(X = -1) = 1/6$

$P(X = 1) = 1/6$

$P(X = 3/2) = 1/4$

$P(X = 5) = 1/4$



Ejercicio 2
Se consideran las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1.

$$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \frac{x}{1+x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Hallar α y β para que F sea una función de distribución.

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

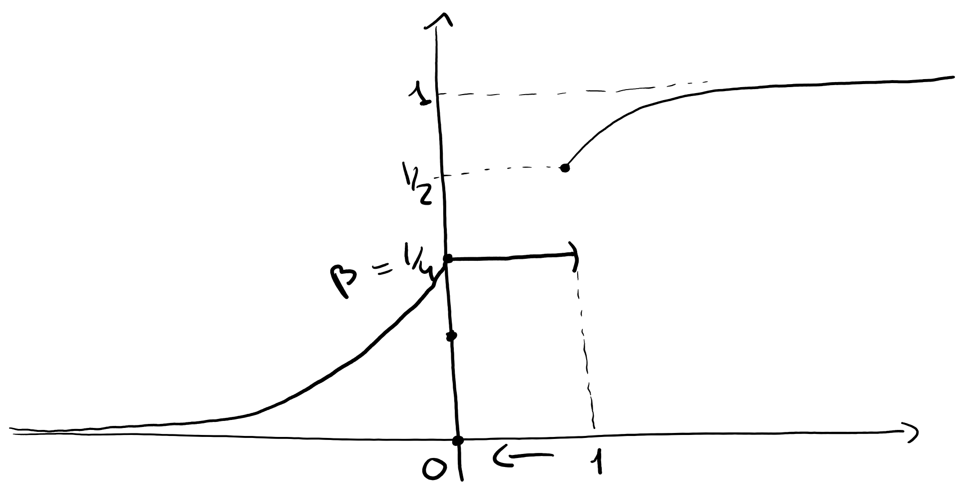
$$0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \beta e^{x} = 0$$

- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

$$1 = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \alpha \frac{x}{1+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \alpha \frac{1}{\frac{1}{x}+1} \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$= \alpha$$



- F creciente $\Rightarrow \beta \leq 1/4$

- F continua por derecha

  - en 1: $\underbrace{F(1)}_{= 1/2} = \lim_{x\to1^+} F(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$

  - en 0: $\underbrace{F(0)}_{= \beta} = \lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{4}}$

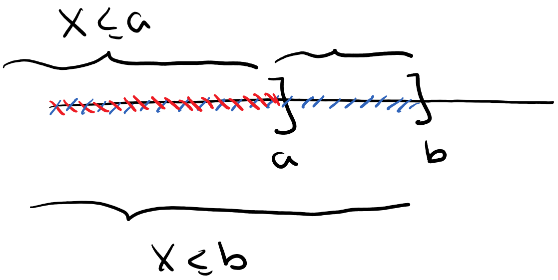
Ejercicio 3

Se considera la función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X. Probar que:

1. $\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $\mathbf{P}(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
3. $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
4. $\mathbf{P}(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$
5. $\mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
6. $\mathbf{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$
7. $\mathbf{P}(X \geqslant a) = 1 - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

F_X función de distribución $F_X(x) = P(X \leq x)$

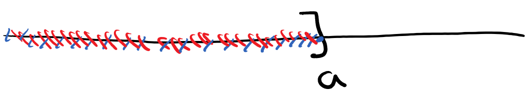
① $P(a < X \leq b) = P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
$= F_X(b) - F_X(a)$



$\{X \leq a\} \subseteq \{X \leq b\}$

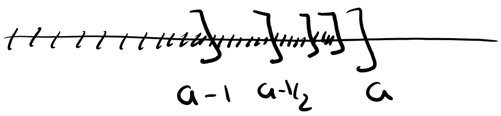
② $P(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

$$P(X=a) = P(\{X \leq a\} \setminus \{X < a\}) = \underbrace{P(X \leq a)}_{F_X(a)} - \underbrace{P(X < a)}_{\lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)}$$



vamos a probar que $P(X < a) = \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

$\{X < a\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq a - 1/n\}$ unión de conjuntos crecientes



$\{X \leq a - 1/n\} \subset \{X \leq a - 1/m\}$

si $m > n$

$$P(X<a) = P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \leq a - 1/n\}\Big) \quad \text{teorema de continuidad}$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X \leq a - 1/n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_X(a - 1/n)$$

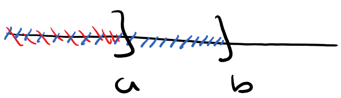
$$= \lim_{x\to a^-} F_X(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_X(a) &= P(X \leq a) \\ \lim_{x\to a^-} F_X(x) &= P(X<a) \end{aligned}}$$

5. $\mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x\to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x\to a^-} F_X(x)$

$$P(a \leq X < b) = P(\{X<b\} \setminus \{X<a\}) = P(X<b) - P(X<a)$$

$$= \lim_{x\to b^-} F_X(x) - \lim_{x\to a^-} F_X(x)$$



Distribución binomial

tenemos un experimento que puede dar exito o fracaso

la probabilidad de que de exito es p

repetimos el experimento n veces

X variable aleatoria que cuenta el número de exitos.

$X \sim Bin(n, p)$

n: cantidad de veces que se repite el experimento

p: probabilidad del exito en un experimento

---

tenemos una moneda cargada $P(C) = 1/4$ exito

$P(N) = 3/4$

tiramos la moneda 6 veces

me interesa saber cuantas veces salió cara

X = # veces que salió cara

$\Omega = \{(C,N,N,N,N,C),\ (N,N,C,N,N,N), \ldots\}$

$X((C,N,N,N,N,C)) = 2$

$X((N,N,C,N,N,N)) = 1$

$X \sim Bin(6, 1/4)$

---

vamos a calcular la fpp de $X \sim Bin(n, p)$

tenemos un experimento con probabilidad de exito p

repetimos ese experimento n veces

X cuenta el numero de exitos

X toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$p_X(0) = P(X = 0) = (1-p)^n$$

$$\underbrace{\left(\frac{F}{1-p}, \frac{F}{1-p}, \frac{F}{1-p}, \frac{F}{1-p}, \dots, \frac{F}{1-p}\right)}_{\text{n repeticiones del experimento}}$$

$$p_X(1) = P(X = 1) = \underbrace{C_1^n}_{=n} p(1-p)^{n-1}$$

$$\underbrace{\left(\frac{F}{1-p}, \frac{F}{1-p}, \frac{E}{p}, \frac{F}{1-p}, \dots, \frac{F}{1-p}\right)}_{\text{n repeticiones del experimento}}$$

$$p_X(k) = P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\underbrace{\left(\frac{F}{1-p}, \frac{E}{p}, \frac{F}{1-p}, \frac{E}{p}, \dots, \frac{E}{p}\right)}_{\text{n repeticiones del experimentos}}$$