

Práctico 3

jueves, 24 de marzo de 2022

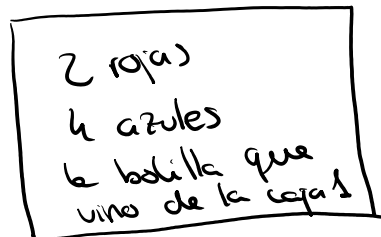
Ejercicio 9 (Examen, febrero 2004)

De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. A continuación se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?
3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

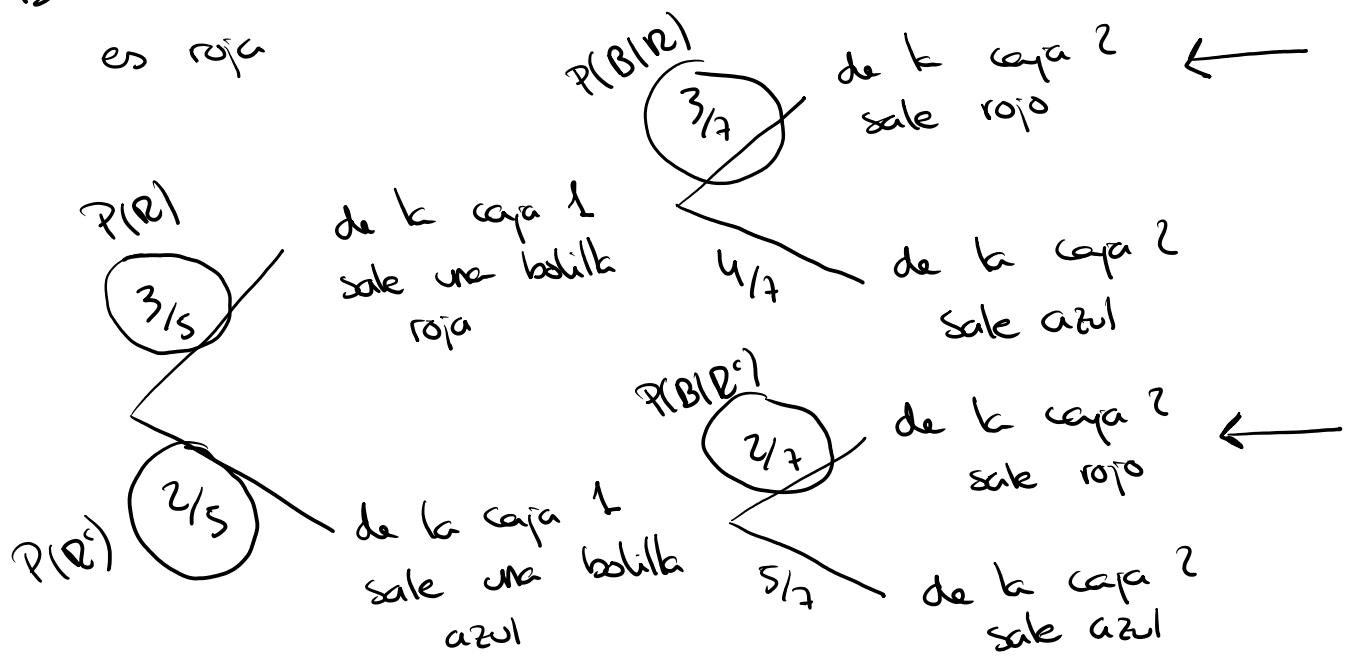


⊕ A = la bolilla extraída de la segunda caja es la misma que se extrajo de la primera



$$P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{7}$$

② B = la bolilla extraída de la segunda caja es roja



$$P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7}$$

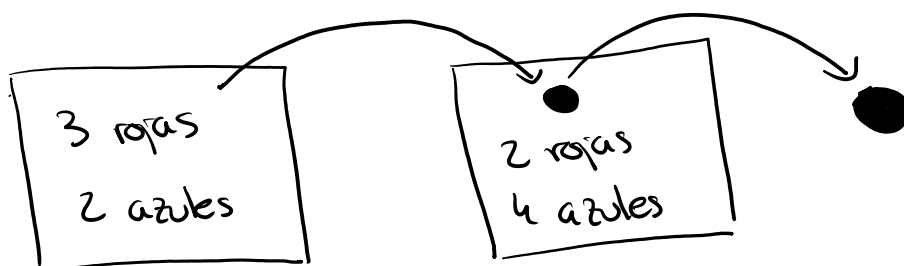
R = la bolilla extraída de la primera caja es roja

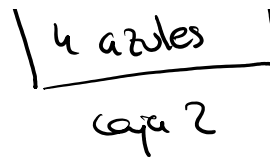
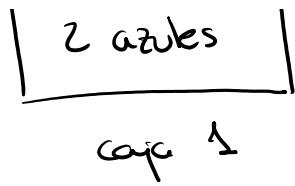
$$P(B) = P(B|R)P(R) + P(B|R^c)P(R^c)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5}$$

$$③ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5}}$$

$$P(B|A) = \frac{3}{5} \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B|A)P(A) = P(A \cap B)$$





Ejercicio 8 (Examen, marzo de 2003)

Se admite que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5% consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un análisis clínico: si el resultado de aplicar el análisis a las dos submuestras da positivo, el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado.

Considere los eventos:

$A_1 = \{ \text{el resultado de la primera submuestra es positivo} \}$

$A_2 = \{ \text{el resultado de la segunda submuestra es positivo} \}$

$B = \{ \text{el jugador es sancionado} \} = A_1 \cap A_2$

$D = \{ \text{el jugador consumió anfetaminas} \}$

$$P(A_1|D) = 0,9$$

$$P(A_1|D^c) = 0,02$$

$$P(A_2|D) = 0,9$$

$$P(A_2|D^c) = 0,02$$

$$P(D) = 0,05$$

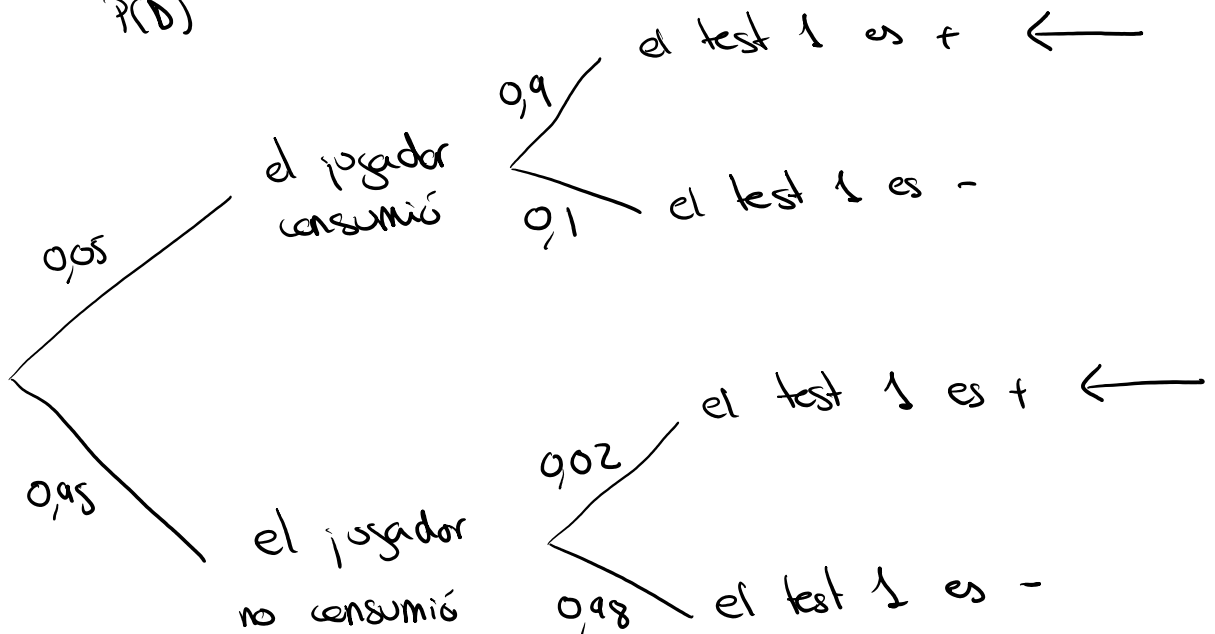
Se asume que los eventos A_1 y A_2 condicionados a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)P(A_2|D)$ y $P(A_1 \cap A_2|D^c) = P(A_1|D^c)P(A_2|D^c)$.

Se sabe además que $P(A_i|D) = 0,90$ y $P(A_i|D^c) = 0,02$ para $i = 1, 2$.

1. Calcule $P(D|A_1)$, esto es, la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.

$$P(D|A_1) = \frac{P(D \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1|D)P(D)}{P(A_1)} ?$$

$$P(A_1|D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)}$$



$$P(A_1) = 0,05 \cdot 0,9 + 0,95 \cdot 0,02 = 0,064$$

$$P(A_1) = P(A_1 | D)P(D) + P(A_1 | D^c)P(D^c)$$

$$= 0,9 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,95$$

$$P(D | A_1) = \frac{P(A_1 | D)P(D)}{P(A_1)} = \frac{0,9 \cdot 0,05}{0,064} = 0,703125$$

2. Calcule $P(B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1 \cap A_2 | D)P(D) + P(A_1 \cap A_2 | D^c)P(D^c)$$

$$= P(A_1 | D)P(A_2 | D)P(D) + P(A_1 | D^c)P(A_2 | D^c)P(D^c)$$

$$= 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,02 \cdot 0,95$$

$$= 0,04088$$

A_1 y A_2 independientes? $P(A_1 \cap A_2) \stackrel{?}{=} P(A_1)P(A_2)$

$$P(A_1 \cap A_2) = 0,04088$$

$$P(A_1)P(A_2) = 0,064 \cdot 0,064 = 0,004096$$

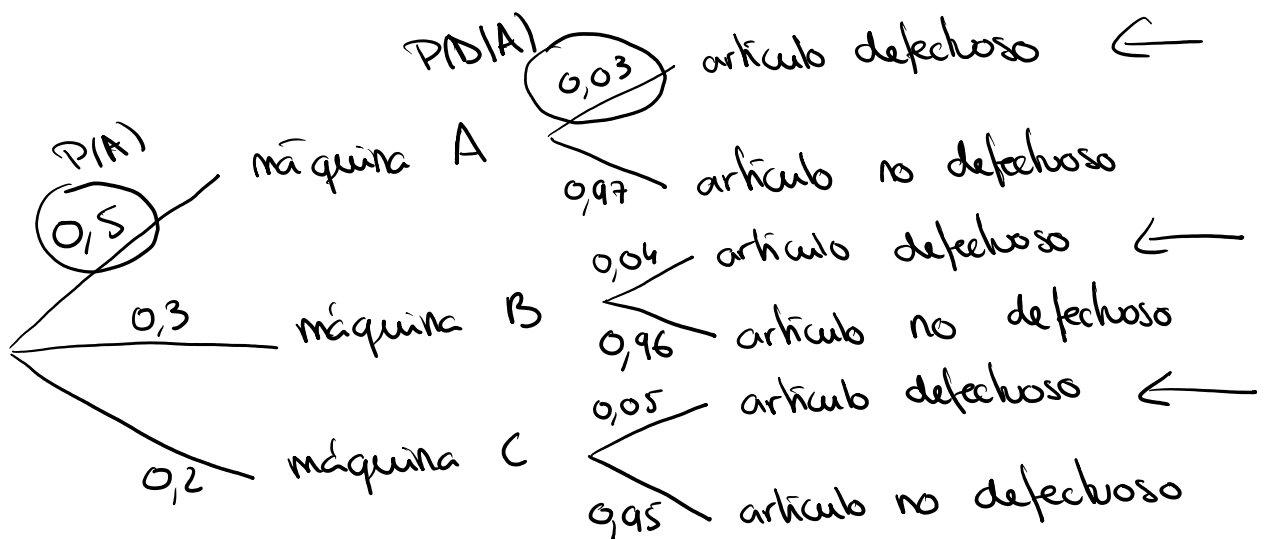
A_1 y A_2 no son independientes

3. Calcule $P(D|B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.

$$\begin{aligned}
 P(D|B) &= \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|D)P(D)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(A_1 \cap A_2 | D)P(D)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(A_1 | D)P(A_2 | D)P(D)}{P(B)} \\
 &= \frac{0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,05}{0,04088} \\
 &= 0,9907
 \end{aligned}$$

ejercicio 7

2. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de producción de defectuosos de cada máquina son 3%, 4% y 5% respectivamente. Se toma al azar un artículo de la producción total. Si el artículo seleccionado es defectuoso, hallar la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.



D = el artículo es defectuoso

A = el artículo fue producido por la máquina A

B = _____ B

C = _____ C

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} \quad \text{Bayes}$$

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \quad \text{probabilidad total}$$
$$= 0,03 \cdot 0,5 + 0,04 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,2$$

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0,03 \cdot 0,5}{0,03 \cdot 0,5 + 0,04 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,2}$$

A y B independientes \Rightarrow A^c y B^c independientes?

$$P(A^c \cap B^c) \stackrel{?}{=} P(A^c)P(B^c)$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \end{aligned}$$

$$P(A^c)P(B^c) = (1 - P(A))(1 - P(B))$$

$$= 1 - P(B) - P(A) + P(A)P(B)$$

Ejercicio 2

Si A y B son sucesos independientes y B y C también son sucesos independientes. ¿Puede afirmarse que A y C son independientes? En caso afirmativo demostrarlo, en caso contrario dar un contraejemplo.

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ independientes} \\ B \text{ y } C \text{ independientes} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ y } C \text{ independientes}$$

experimento : tirar un dado 2 veces

A = en la primera tirada sale 2

B = en la segunda tirada sale impar

C = en la primera tirada sale par

$$P(C|A) = 1 \quad P(C) = \frac{1}{2}$$