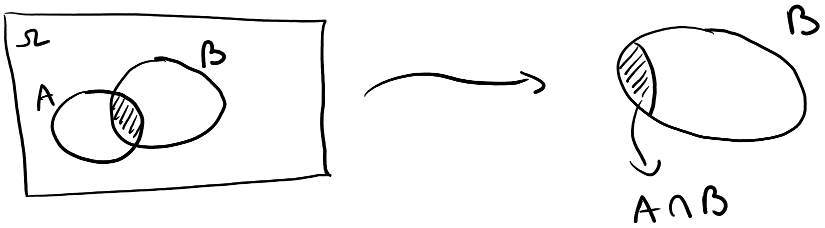
Práctico 3

martes, 22 de marzo de 2022

A y B eventos en un espacio muestral Ω

$P(B) > 0$



$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

→ regla del producto: $P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$

→ A y B son independientes sii $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$

→ formula de probabilidad total:

A y B eventos $\quad A = (A\cap B) \cup (A\cap B^c)$

$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$

en general: si $C_1, \dots, C_n$ eventos disjuntos tales que $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$$

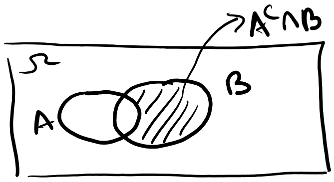
Ejercicio 4

Se consideran los eventos A y B tales que

1. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathbf{P}(A\cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular
   - *a*) $\mathbf{P}(A|B)$
   - *b*) $\mathbf{P}(B|A)$
   - *c*) $\mathbf{P}(A^C|B)$
   - *d*) $\mathbf{P}(B^C|A)$
   - *e*) $\mathbf{P}(A^C|B^C)$
   - *f*) $\mathbf{P}(B^C|A^C)$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{1/4}{1/3} = \dfrac{3}{4}$

c) $P(A^c|B) = \dfrac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} - \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$



$B = (A^c \cap B) \cup (A\cap B)$

$P(B) = P(A^c\cap B) + P(A\cap B)$

$P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

$$\boxed{P(A^c|B) = 1 - P(A|B)}$$

$P(\cdot \mid B)$: Eventos $\longrightarrow [0,1]$ es una función de probabilidad

$P(A|\cdot)$ no es una función de probabilidad

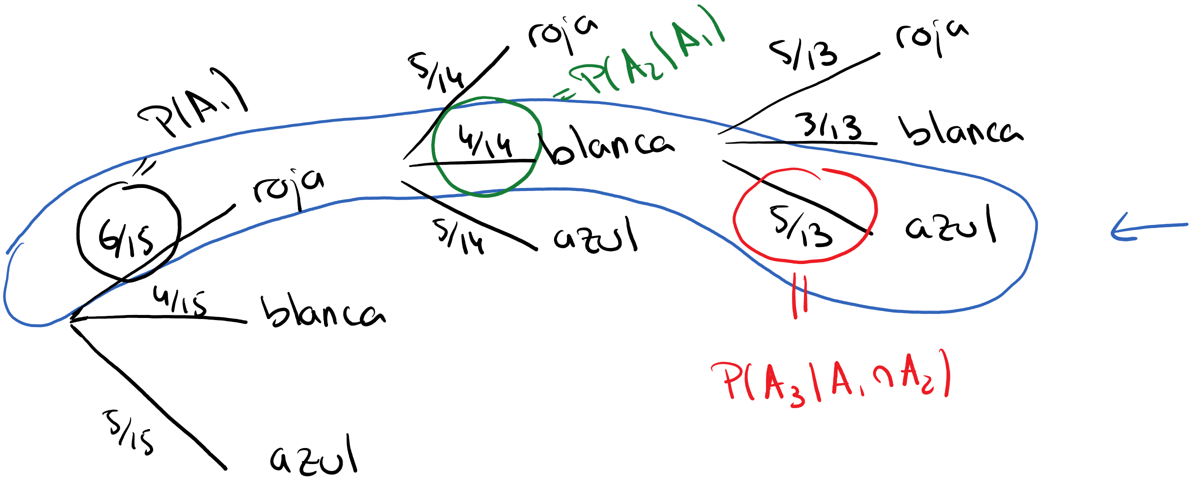
d) $P(A^c|B^c) = \dfrac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P((A\cup B)^c)}{P(B^c)} = \dfrac{1 - P(A\cup B)}{1 - P(B)}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$

Ejercicio 5

1. Se considera una caja que contiene 6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva (sin reposición). Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul



$$P(1^{ra} \text{ roja}, 2^{da} \text{ blanca}, 3^{ra} \text{ azul}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13}$$

A_1 = la primer bolilla es roja

A_2 = la segunda bolilla es blanca

A_3 = la tercer bolilla es azul

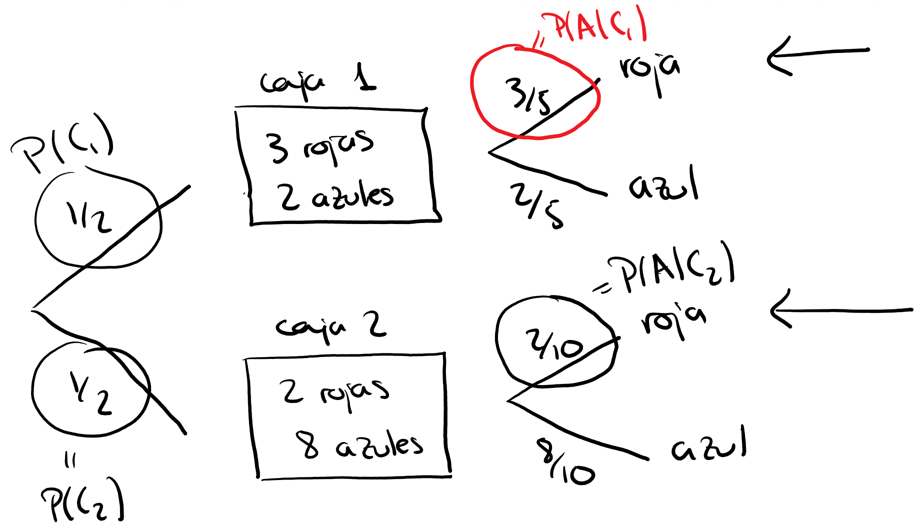
$$P(A \cap B) = P(B|A)\,P(A)$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\ &= P(A_1 \cap A_2)\,P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} \end{aligned}$$

2. Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.

   a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.

   b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?



A = la bolilla extraída es roja

$$P(A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}$$

C_1 = escogemos la caja 1

C_2 = escogemos la caja 2

$$P(A) = P(C_1)P(A|C_1) + P(C_2)P(A|C_2) \quad \text{probabilidad total}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}$$

b) $$P(C_1|A) = \frac{P(C_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C_1)P(C_1)}{P(A)} = \frac{3/5 \cdot 1/2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}}$$

$$P(A|C_1) = \frac{P(A\cap C_1)}{P(C_1)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap C_1) = P(A|C_1)P(C_1)$$

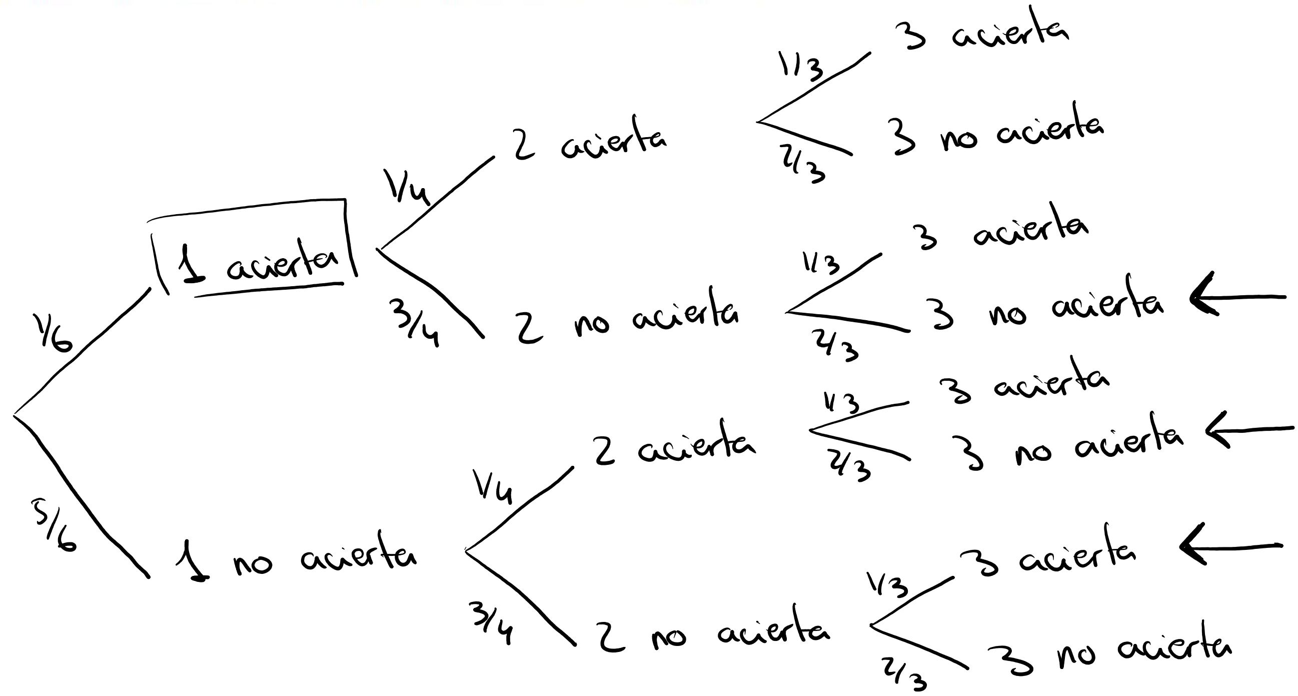
Ejercicio 6

1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

   b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

a)



A = el blanco es alcanzado solamente una vez

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

A_1 = el jugador uno acierta

A_2 = el jugador 2 acierta

A_3 = el jugador 3 acierta

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$$

$$A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

eventos independientes   independientes   independientes

$$= P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

$$P(A_1 | A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|A_1)P(A_1)}{P(A)} = \frac{3/4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}$$

$$P(A|A_1) = \frac{P(A \cap A_1)}{P(A_1)}$$

$$\Rightarrow P(A|A_1)P(A_1) = P(A \cap A_1)$$

2. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$.
   a) Si cada uno dispara dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado por lo menos una vez?
   b) Supongamos ahora que cada uno dispara una vez. Dado que el blanco fue alcanzado solamente una vez, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

a) A = el blanco es alcanza por lo menos una vez

$B_{i,j}$ = el jugador i <u>no</u> acierta en la tirada j

$B_{1,1}$ = el jugador 1 <u>no</u> aciente en su primer tirada

$$A^c = B_{1,1} \cap B_{1,2} \cap B_{2,1} \cap B_{2,2}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(B_{1,1} \cap B_{1,2} \cap B_{2,1} \cap B_{2,2})$$

independientes

$$= 1 - P(B_{1,1})P(B_{1,2})P(B_{2,1})P(B_{2,2})$$

$$= 1 - \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = 3/4$$