13. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

(a) Mostrar que si A y B son sucesos entonces:

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

(b) * Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(A_n)$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0}$

entonces $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

↑ se cumple la igualdad cuando A y B son incompatibles

b) $A_1, \ldots, A_m$ sucesos

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$

por inducción en m

- caso base: si $m = 2$ ✓

$$P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

- paso inductivo: suponemos que vale para m y queremos ver que vale para m+1

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m+1} A_n\right) = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \cup A_{m+1}\right)$$

$$\leq P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) + P(A_{m+1})$$

aplicar el caso base →

$$\leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n) + P(A_{m+1})$$

aplicamos la hipótesis inductiva

$$= \sum_{n=1}^{m+1} P(A_n)$$

(c) ** Demostrar que si $\{A_n\}_{n\in N}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

teorema de continuidad: si $\{A_k\}$ sucesión de sucesos

creciente $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \subset \dots$

entonces $\underbrace{P(\lim_{k\to\infty} A_k)}_{= P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)} = \lim_{k\to\infty} P(A_k)$

---

tenemos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de sucesos

queremos probar que $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{N\to\infty} P(\bigcup_{n=1}^{N} A_n)$

queremos a partir de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ construir una sucesión creciente de sucesos para aplicar el teorema de continuidad

$B_1 = A_1$

$B_2 = A_1 \cup A_2$

$B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$\vdots$

$B_n = B_{n-1} \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$B_1 \cup B_2 = A_1 \cup A_1 \cup A_2 = A_1 \cup A_2$

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A_1 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$
$= A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{N} B_n}_{B_N} = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}_{\lim_{n\to\infty} B_n}$

$\{B_n\}$ es una sucesión creciente de sucesos

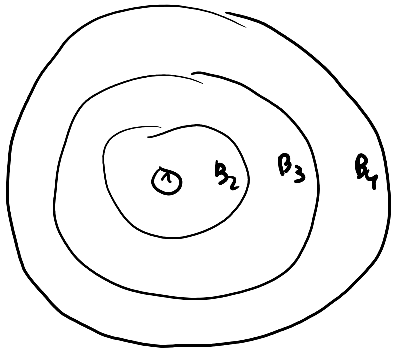
$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right)$

teorema de continuidad

$= \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$



$\bigcup_{i=1}^{4} B_i = B_4$

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B_n$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = "B_\infty" = \lim_{n\to\infty} B_n$

(c) ** Demostrar que si $\{A_n\}_{n\in N}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$\longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(\cap A_n)^c = \cup A_n^c$$

Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right)$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)^c\right)$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

PRACTICO 2

Equiprobabilidad = todos los resultados del experimento tienen la misma probabilidad

= todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad

A = colección de resultados del experimento

= subconjunto de Ω

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

1. Determinar el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, y en el caso que sea finito, indicar su cardinal. [2]

   (a) Lanzar al aire una moneda tres veces

   (b) Extraer dos fichas sucesivamente y sin reposición de una bolsa que contiene fichas numeradas con los 5 dígitos pares.

   (c) Lanzar una moneda finalizando el experimento si sale número; si sale cara, tirar además un dado.

   (d) Seleccionar al azar dos alumnos de una clase de 30.

   (e) Valor de la tasa de inflación para este año.

a) lanzar una moneda tres veces

$$\Omega = \{NNN, NNC, NCN, NCC, CNN, CNC, CCN, CCC\}$$

$$= \{(i,j,k) : i,j,k \in \{C,N\}\}$$

d) seleccionar al azar dos alumnos de una clase de 30

alumnos $= \{1, \dots, 30\}$

$$\Omega = \{\{i,j\} : \underset{i \neq j}{i,j \in \{1, \dots, 30\}}\}$$

$$|\Omega| = \binom{30}{2}$$

b) en una bolsa: 0, 2, 4, 6, 8

extraer sucesivamente y sin reposición dos fichas

$$\Omega = \{(i,j) : i \neq j \quad i,j \in \{0,2,4,6,8\}\}$$

$$|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$$

e) valor de la tasa de inflación

$$\Omega = \mathbb{R}^+$$

2. (a) Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

   i. Construir un espacio muestral para este experimento.

   ii. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

   iii. ¿Cuál es la probabilidad de acertar en al menos 3 números (es decir, acertar exactamente 3, exactamente 4, o exactamente 5 números)?

i) $\Omega = \left\{ \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\} : n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \{1, \dots 36\} \text{ todos distintos} \right\}$

$\{7, 21, 28, 40, 50\}$

$\{50, 28, 40, 7, 21\}$

= subconjuntos de 5 elementos de $\{1, \dots, 36\}$

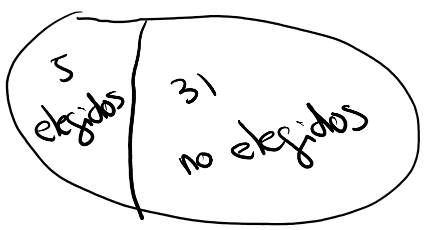
$$|\Omega| = \binom{36}{5}$$

ii) $$P(\text{ganar}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{\binom{36}{5}} = 0{,}0000027$$

iii) P(acertar al menos 3 numeros) = P({acertar exactamente 3} ∪ {acertar exactamente 4} ∪ {acertar exactamente 5})

= P(acertar exactamente 3) + P(acertar exactamente 4) + P(acertar exactamente 5)

$$P(\text{acertar exactamente } 3) = \frac{CF}{CP} = \frac{\overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{formas de tomar 3 entre los elegidos}} \overbrace{\binom{31}{2}}^{\text{formas de tomar 2 entre los no elegidos}}}{\binom{36}{5}}$$



$$P(\text{acertar exactamente } 4) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{5}{4}\binom{31}{1}}{\binom{36}{5}} \qquad \binom{31}{1} = 31$$

$$P(\text{acertar exactamente } 5) = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{\binom{36}{5}} = \frac{\overbrace{\binom{5}{5}}^{1}\overbrace{\binom{31}{0}}^{1}}{\binom{36}{5}}$$