Práctico 11

jueves, 16 de junio de 2022

Ejercicio 4

Se consideran 16 mediciones de una cierta concentración. Puede suponerse que las mediciones $X_1, \dots, X_{16}$ siguen el modelo: $X_i = \mu + e_i$, donde $e_1, \dots, e_{16}$ $iid \sim N(0, \sigma^2)$.

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

1. Si la muestra es:

0.50	0.38	0.61	0.44	0.53	0.42	0.43	0.47
0.58	0.36	0.55	0.51	0.57	0.59	0.46	0.48

Hallar un intervalo de confianza 95 % para μ.

el intervalo de confianza 1-α tiene esta forma:

$$\left[\overline{X}_n - \frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} s_n \ , \ \overline{X}_n + \frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} s_n \right]$$

dado: $\alpha = 0{,}05$

$n = 16$

$\overline{X}_n = 0{,}4925$

$s_n = 0{,}07$

$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0{,}025}(15) = 2{,}131$

$$\frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} s_n = \frac{2{,}131}{\sqrt{16}} 0{,}07 = 0{,}037$$

el intervalo de confianza es:

$$\overbrace{\left[0{,}4925 - 0{,}037 \ ; \ 0{,}4925 + 0{,}037 \right]}^{I}$$

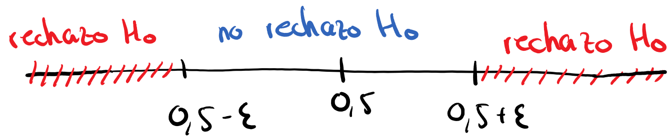
$P(\mu \in I) = 0{,}95$

$P(\mu \notin I) = 0{,}05$

2. Se quiere probar la hipótesis de que $\mu = 0{,}50$. ¿Cuál es su decisión para $\alpha = 0{,}05$?

$$\begin{cases} H_0: \mu = 0,5 \\ H_1: \mu \neq 0,5 \end{cases}$$

la región crítica va a ser de la forma

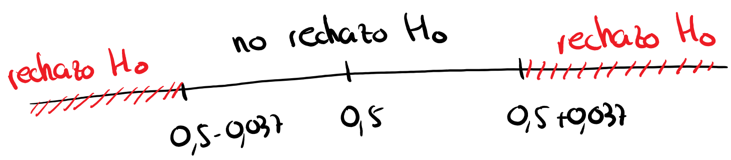


$$RC = \left\{ |\bar{X}_n - 0,5| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

0,037

$$= \left\{ \bar{X}_n \notin [0,5 - 0,037 \,;\, 0,5 + 0,037] \right\}$$

$$= \left\{ \bar{X}_n \leq 0,5 - 0,037 \text{ ó } \bar{X}_n \geq 0,5 + 0,037 \right\}$$



$0,5 - 0,037 = 0,463$

el promedio muestral es $\bar{X}_n = 0,4925$

$\Rightarrow \bar{X}_n \notin RC$ y por lo tanto no rechazamos H_0

otra forma de verlo:

$$RC = \left\{ |\bar{X}_n - 0,5| \geq 0,037 \right\}$$

$$= \left\{ 0,5 \notin \underbrace{[\bar{X}_n - 0,037 \,,\, \bar{X}_n + 0,037]}_{\text{es el IdC}} \right\}$$

entonces si $0,5 \in IdC$ no rechazamos H_0

como $0,5 \in [0,4925 - 0,037 \,;\, 0,4925 + 0,037]$ no rechazamos H_0

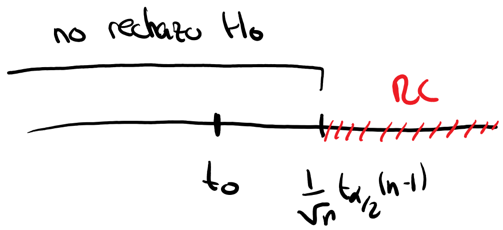
3. Para la prueba anterior calcule el p-valor α^*.

$$RC = \left\{ |\bar{X}_n - 0{,}5| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\frac{|\bar{X}_n - 0{,}5|}{S_n}}_{\text{depende de la muestra}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)}_{\text{no depende de la muestra}} \right\}$$

sea $T = \dfrac{|\bar{X}_n - 0{,}5|}{S_n}$

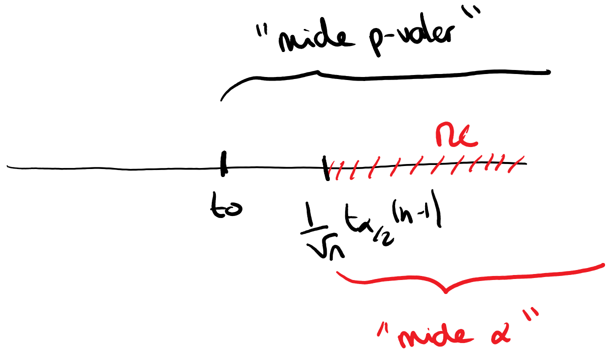
$t_0 = T(x_1, \dots, x_n)$ es el valor que observamos de T



lo que hicimos hasta ahora:

① escogemos α y tenemos el valor de $\frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$

② con la muestra calculamos t_0 y lo comparamos con $\frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$



en vez de comparar t_0 y $\frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$ vamos a comparar

$$\underbrace{P_{H_0}(T \geq t_0)}_{=\ \text{p-valor}} \quad y \quad \underbrace{P_{H_0}\left(T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)}_{=\ \alpha}$$

$$t_0 < \frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad P_{H_0}(T \geq t_0) > P_{H_0}\left(T \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{p-valor} > \alpha$$

Entonces:

no rechazo $H_0 \Longleftrightarrow$ p-valor $> \alpha$

rechazo $H_0 \Longleftrightarrow$ p-valor $\leq \alpha$

$$RC = \left\{ |\overline{X}_n - 0{,}5| \geq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{|\overline{X}_n - 0{,}5|}{S_n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right\}$$

sea $T = \frac{|\overline{X}_n - 0{,}5|}{S_n}$

$$t_0 = \frac{|0{,}4925 - 0{,}5|}{0{,}07} = 0{,}10$$

$$\text{p-valor} = P_{H_0}\left(\frac{|\overline{X}_n - 0{,}5|}{S_n} \geq 0{,}10 \right)$$

como suponemos que vale H_0:
$X \sim \mathcal{N}(0{,}5\,,\ \sigma^2)$

$$= P_{H_0}\left(\frac{|\overline{X}_n - 0{,}5|}{S_n}\sqrt{16} \geq \sqrt{16} \cdot 0{,}10 \right)$$

$$= P\left(\frac{|\overline{X}_n - 0{,}5|}{S_n}\sqrt{16} \geq 0{,}4 \right)$$

$$= 1 - P\Big(-0{,}4 \le \underbrace{\frac{X_n - 0{,}5}{S_n}\sqrt{16}}_{\text{T-student con 15 grados de libertad}} \le 0{,}4\Big)$$

$$= 1 - \big(F_T(0{,}4) - F_T(-0{,}4)\big)$$

$$= 1 - \big(F_T(0{,}4) - (1 - F_T(0{,}4))\big)$$

$$= 2 - 2\underbrace{F_T(0{,}4)}_{0{,}65}$$

$$= 0{,}7$$

p-valor $= 0{,}7$

entonces si $\alpha < 0{,}7$ no rechazamos H_0

P-VALOR PARA UNA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Tenemos una prueba de hipótesis con región crítica

$$RC = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n : T(X_1, \dots, X_n) \geq c\}$$

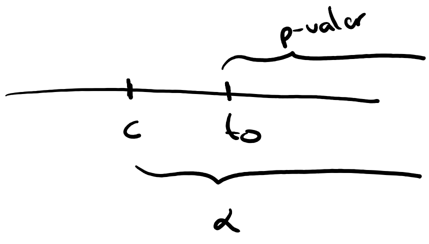
no depende de la muestra

si $t_0 = T(x_1, \dots, x_n)$

entonces p-valor $= P_{H_0}(T \geq t_0)$

se cumple:

rechazo H_0 si y solamente si $\alpha \geq$ p-valor



Ejercicio 7
Se toma una muestra aleatoria de n habitantes de una ciudad muy grande, en la que una proporción p de personas padecen cierta enfermedad.

1. Si n = 400 y se encuentran 165 personas enfermas, estimar p y construir un intervalo de confianza 95 % para p.
2. Hacer una prueba de hipótesis para decidir si $p = 0{,}40$

$X \sim Ber(p)$ donde p es la proporción de personas que paden la enfermedad

$$\overline{X}_n = \frac{165}{400} = 0{,}4125$$

$$\begin{cases} H_0 : & p = 0{,}4 \\ H_1 : & p \neq 0{,}4 \end{cases}$$

la región crítica es

$$RC = \left\{ |\overline{X}_n - 0{,}4| \geq \frac{\sqrt{0{,}4(1-0{,}4)}}{\sqrt{400}} z_{1-\alpha/2} \right\}$$

sea $T(X_1, \dots, X_n) = |\overline{X}_n - 0{,}4|$

$$t_0 = |0{,}4125 - 0{,}4| = 0{,}0125$$

$$\begin{aligned} p\text{-valor} &= P_{H_0}(T \geq t_0) \\ &= P_{H_0}(|\overline{X}_n - 0{,}4| \geq 0{,}0125) \\ &= 1 - P_{H_0}(-0{,}0125 \leq \overline{X}_n - 0{,}4 \leq 0{,}0125) \end{aligned}$$

como suponemos que vale H_0: $X \sim Ber(0{,}4)$

$$\overline{X}_n \underset{\substack{\uparrow \\ TCL}}{\sim} \mathcal{N}\left(0{,}4, \frac{0{,}4 \cdot (1-0{,}4)}{400}\right)$$

$$p\text{-valor} = 1 - P\left(-0{,}0125 \cdot \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}} \leq \frac{\overline{X}_n - 0{,}4}{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}} \sqrt{400} \leq 0{,}0125 \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}\right)$$

$$= 1 - P\left(-0{,}51 \leq \frac{\bar{X}_n - 0{,}4}{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}} \sqrt{400} \leq 0{,}51\right)$$

$$= 1 - (\phi(0{,}51) - \phi(-0{,}51))$$

$$= 1 - (\phi(0{,}51) - (1 - \phi(0{,}51)))$$

$$= 2 - 2\phi(0{,}51)$$

$$= 2 - 2 \cdot 0{,}695$$

$$= 0{,}61$$

entonces p-valor $= 0{,}61$

si $\alpha < 0{,}61$ no rechazamos H_0.