Práctico 11

martes, 14 de junio de 2022

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Tenemos dos hipótesis → H_0 la hipótesis nula
→ H_1 la hipótesis alternativa

Dada una MAS $X_1, \ldots, X_n$ tenemos que decidir entre H_0 y H_1

→ definimos la región crítica $RC \subset \mathbb{R}^n$

RC es la zona de rechazo de H_0

es decir, son las muestras que nos convencen que H_1 es cierta

→ tenemos dos tipos de errores:

- error de tipo 1: rechazo H_0 cuando H_0 es cierta
- error de tipo 2: no rechazo H_0 cuando H_1 es cierta

$\alpha = P($rechazar H_0 cuando H_0 es cierta$)$

$= P_{H_0}((X_1, \ldots, X_n) \in RC)$

α es el nivel de significación de la prueba

$\beta = P($no rechazar H_0 cuando H_1 es cierta$)$

$= P_{H_1}((X_1, \ldots, X_n) \notin RC)$

potencia de la prueba:

potencia $= 1 - \beta = P($rechazar H_0 cuando H_1 es cierta$)$

Procedimiento:

(1) plantear H_0 y H_1

(2) elegir el valor de α

(3) construir la RC y tomar la decisión $\nearrow$ si la muestra cae en RC rechazo H_0

$\searrow$ si la muestra no cae en RC no rechazo H_0

Ejercicio 1

La siguiente tabla registra los niveles de cloro en sangre de una muestra de 10 pacientes de una clínica, medido en milimoles por litro.

101,99	106,64	103,36	109,54	103,99
107,32	106,55	103,7	100,57	105,85

1. Asumiendo que los datos tienen distribución normal con media μ y desvío $\sigma = 2,5$, implemente la siguiente prueba de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 104 \text{ mg/dl} \\ H_1: & \mu > 104 \text{ mg/dl.} \end{cases}$$

Nota: Trabaje al nivel $\alpha = 0,05$

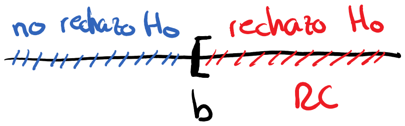
2. Sabiendo que el verdadero valor de μ es 106 mg/dl, calcular la potencia de la prueba.

(1) $X \sim \mathcal{N}(\mu, (2,5)^2)$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 104 \\ H_1: \mu > 104 \end{cases}$$

$\alpha = 0,05$

la región crítica va a ser de la forma $RC = \{ \overline{X}_n \geq b \}$



buscamos b de forma que α sea 0,05 en una muestra de tamaño 10

$$\alpha = P_{H_0}\left((X_1, \dots, X_n) \in RC \right)$$

$$= P_{H_0}\left(\overline{X_n} \geq b \right)$$

como estamos suponiendo que H_0 es cierta:

$$X \sim \mathcal{N}\left(104, (2{,}5)^2\right)$$

$$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(104, \frac{(2{,}5)^2}{10}\right)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{\overline{X_n} - 104}{2{,}5}\sqrt{10}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{b-104}{2{,}5}\sqrt{10} \right)$$

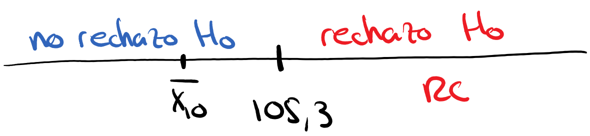
$$= 1 - \phi\left(\frac{b-104}{2{,}5}\sqrt{10} \right)$$

como $\alpha = 0{,}05$ tenemos que $\phi\left(\frac{b-104}{2{,}5}\sqrt{10} \right) = 0{,}95$

$$\Rightarrow \frac{b-104}{2{,}5}\sqrt{10} = \phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645$$

$$\Rightarrow b = \frac{1{,}645 \cdot 2{,}5}{\sqrt{10}} + 104 = 105{,}3$$

$$RC = \left\{ \overline{X_n} \geq 105{,}3 \right\}$$



el promedio muestral es $\overline{X_{10}} = 104{,}95$ entonces no rechazo H_0

b) sabiendo que $\underline{\mu = 106}$ queremos calcular la potencia

potencia = P(rechazar H_0 cuando H_1 es cierta)

$= P_{H_1}(\overline{X_n} \geq 105,3)$

sabemos que $\mu = 106$ entonces:

$X \sim \mathcal{N}(106, (2,5)^2)$

$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(106, \frac{(2,5)^2}{10}\right)$

$= P\left(\frac{\overline{X_n} - 106}{2,5}\sqrt{10} \geq \frac{105,3 - 106}{2,5}\sqrt{10}\right)$

$= 1 - \phi\left(\frac{105,3 - 106}{2,5}\sqrt{10}\right)$

$= 1 - \left(1 - \phi\left(\frac{106 - 105,3}{2,5}\sqrt{10}\right)\right)$

$= \phi\left(\frac{106 - 105,3}{2,5}\sqrt{10}\right)$

$= \phi(0,89)$

$= 0,8133$

Ejercicio 3

En años recientes los granjeros suecos fumigaron sus campos sembrados de cereales con un fungicida que contenía metil de mercurio. Para tener una estimación del grado de contaminación inducido a productos comestibles, se realizó un estudio sobre el nivel de mercurio de los huevos producidos en Suecia. Para tal fin se tomó una muestra aletoria de 1600 huevos y se observó que 940 de ellos estaban contaminados (esto es, tenían un nivel de metil de mercurio superior al máximo tolerado). En lo que sigue, denotamos por p a la proporción de huevos contaminados.

a) Construya un intervalo de confianza 90 % aproximado para p.

b) Realice una prueba de hipótesis al nivel $\alpha = 0,10$ para decidir entre las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: & p = 0,6 \\ H_1: & p < 0,6 \end{cases}$$

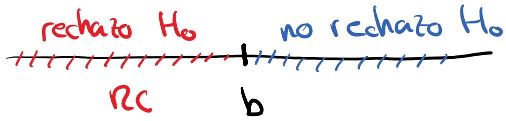
c) Sabiendo que el verdadero valor de p es 0,55, calcule la potencia de la prueba.

$X \sim Ber(p)$ donde p es la proporción verdadera de huevos contaminados

$X_1, \ldots, X_{1600}$ MAS de X $\quad \overline{X_{1600}}$ es un estimador de p

a) $\begin{cases} H_0: & p = 0,6 \\ H_1: & p < 0,6 \end{cases}$

la región crítica va a ser de la forma: $RC = \{\bar{X}_n \leq b\}$



buscamos b de forma que $\alpha = 0,1$ en una muestra de 1600

$$\alpha = P_{H_0}\left((X_1, .., X_n) \in RC\right)$$

$$= P_{H_0}(\bar{X}_n \leq b)$$

como estamos suponiendo que H_0 es cierta

$X \sim Ber(0,6)$

$\bar{X}_n \sim_{aprox} \mathcal{N}\left(0,6, \frac{0,6(1-0,6)}{1600}\right)$

$\uparrow$ TCL

$\frac{0,6(1-0,6)}{1600} = 0,00015$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_n - 0,6}{\sqrt{0,00015}} \leq \frac{b-0,6}{\sqrt{0,00015}}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{b-0,6}{\sqrt{0,00015}}\right)$$

Como $\alpha = 0,1$ tenemos que $\phi\left(\frac{b-0,6}{\sqrt{0,00015}}\right) = 0,1$

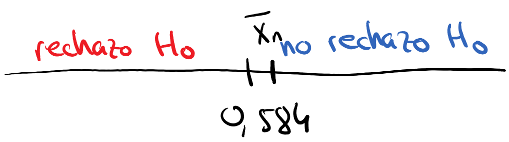
$$\Rightarrow 1 - \phi\left(\frac{b-0,6}{\sqrt{0,00015}}\right) = 0,9$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{0,6-b}{\sqrt{0,00015}}\right) = 0,9$$

$$\Rightarrow \frac{0,6-b}{\sqrt{0,00015}} = \phi^{-1}(0,9) = 1,285$$

$$\Rightarrow b = 0,584$$

$$RC = \{\bar{X}_n \leq 0,584\}$$



el promedio muestral es $\overline{X_{1600}} = \dfrac{940}{1600} = 0{,}5875$ entonces no rechazamos H_0

c) sabiendo que el verdadero valor de p es $\underbrace{0{,}55}$ queremos calcular la potencia de la prueba

potencia = P(rechazar H_0 cuando H_1 es cierta)

$= P_{H_1}(\overline{X_n} \leq 0{,}584)$

$= P\left(\underbrace{\dfrac{\overline{X_n} - 0{,}55}{\sqrt{0{,}00015}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \dfrac{0{,}584 - 0{,}55}{\sqrt{0{,}00015}}\right)$

$= \phi\left(\dfrac{0{,}584 - 0{,}55}{\sqrt{0{,}00015}}\right)$

$= \phi(2{,}77)$

$= 0{,}9972$

como sabemos que $p = 0{,}55$:

$X \sim Ber(0{,}55)$

$\overline{X_n} \underset{\substack{\uparrow \\ TCL}}{\sim_{aprox}} \mathcal{N}\left(0{,}55 \, , \, \dfrac{0{,}55(1-0{,}55)}{1600}\right)$

$\dfrac{0{,}55(1-0{,}55)}{1600} = 0{,}00015$