$X \sim Ber(p)$

$X_1, \ldots, X_n$ MAS de X

por el TCL: $\overline{X_n} \sim_{aprox} \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

el intervalo de confianza $1-\alpha$ para p es de la forma:

$$\left[\overline{X_n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}\right]$$

Ejercicio 11

1. Al probar 100 barras de acero que fabricó la compañía A se encuentra que 12 no cumplieron con las especificaciones.

   a) Determinar un intervalo de confianza 95 % para la proporción verdadera de las barras de acero que no cumplen las especificaciones.

   b) Si se desea estimar la proporción verdadera que no cumple con las especificaciones con una exactitud de 0,05 y una confianza de 0,95. ¿Cuántas barras se deben examinar?

$X \sim Ber(p)$ donde p es la probabilidad de que una barra no cumpla las especificaciones

$X_1, \ldots, X_{100}$ MAS de X

el intervalo de confianza $\overbrace{0,95}^{1-\alpha}$ para p tiene la forma

$$\left[\overline{X_n} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}\right]$$

donde $\alpha = 0,05$

$n = 100$

$\overline{X_n} = \frac{12}{100} = 0,12$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \phi^{-1}\left(1-\frac{0,05}{2}\right) = \phi^{-1}(0,975) = 1,96$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \frac{\sqrt{0{,}12(1-0{,}12)}}{10} = 0{,}064$$

entonces el intervalo de confianza es

$$[0{,}12 - 0{,}064 \,;\, 0{,}12 + 0{,}064]$$

b) Si se desea estimar la proporción verdadera que no cumple con las especificaciones con una exactitud de 0,05 y una confianza de 0,95. ¿Cuántas barras se deben examinar?

$$P(p \in [\bar{X}_n - k \,,\, \bar{X}_n + \underbrace{k}_{\text{exactitud}}]) = \underbrace{1-\alpha}_{\text{confianza}}$$

$\bar{X}_n - k$ $\quad \bar{X}_n \quad$ $\bar{X}_n + k$

p

el intervalo de confianza $1-\alpha$ para p

$$\left[\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \right]$$

buscamos n tal que

$$\underbrace{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{1{,}96} \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05$$

si $p \in [0,1]$ entonces el máximo de $p(1-p)$ es $\frac{1}{4}$

entonces $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) \leq \frac{1}{4}$

entonces buscamos n tal que

$$1{,}96 \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{\sqrt{n}} \leq 0{,}05$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{1{,}96 \cdot 0{,}5} \geq \frac{1}{0{,}05}$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 0{,}5}{0{,}05} \right)^2 = 384{,}16$$

hay que tomar por lo menos 385 barras.

Segundo parcial 2021

Ejercicio 6

Un barco realiza un viaje con 400 personas. En dicho barco, debido a restricciones por COVID, se encuentra un único puesto de venta que vende remeras, gorros y hamburguesas a 8 dólares cada uno. La probabilidad de que una persona compre una remera es 1/4 , la probabilidad de que compre un gorro es 1/4 y la probabilidad de que compre una hamburguesa es 1/4, elecciones de compra independientes entre sí. Sabiendo que ninguna persona compra más de una remera, ni más de un gorro, ni más de una hamburguesa, calcule la probabilidad aproximada de que el barco tenga ventas superiores a 2430 dólares.

X = ganancia del barco

$$P(X \geq 2430) = ?$$

X_i = lo que gastó la persona i

$$X_1 + \dots + X_{400} = X$$

$$Rec(X_1) = \{0, 8, 16, 24\}$$

$$P(X_1 = 0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

$$P(X_1 = 8) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

elegir lo que compramos

$$P(X_1 = 16) = C^3_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(X_1 = 24) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

$E(X_1) = 8 \cdot \frac{27}{64} + 16 \frac{9}{64} + 24 \frac{1}{64} = 6$

$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$

$= 8^2 \cdot \frac{27}{64} + 16^2 \frac{9}{64} + 24^2 \frac{1}{64} - 36$

$= 36$

por el teorema central del límite tenemos

$\overline{X_{400}} \sim_{aprox} \mathcal{N}\left(E(X_1), \frac{Var(X_1)}{400}\right)$

$E(X_1) = 6$

$\frac{Var(X_1)}{400} = \frac{36}{400} = 0{,}09 = 0{,}3^2$

$\Rightarrow \overline{X_{400}} \sim_{aprox} \mathcal{N}(6, (0{,}3)^2)$

$\overline{X_n} \sim_{aprox} \mathcal{N}\left(E(X_1), \frac{Var(X_1)}{n}\right)$

$n\overline{X_n} \sim_{aprox} \mathcal{N}(nE(X_1), n\,Var(X_1))$

$P(X \geq 2430) = P(X_1 + \dots + X_{400} \geq 2430)$

$= P\left(\overline{X_{400}} \geq \frac{2430}{400}\right)$

$= P(\overline{X_{400}} \geq 6{,}075)$

$= P\left(\frac{\overline{X_{400}} - 6}{0{,}3} \geq \frac{6{,}075 - 6}{0{,}3}\right)$

$= P\left(\frac{\overline{X_{400}} - 6}{0{,}3} \geq 0{,}25\right)$

$= 1 - \phi(0{,}25)$

$= 1 - 0{,}5987$

Segundo semestre 2019 (par)

Ejercicio 5 (5 puntos)

Un cajero demora X minutos en atender a un cliente, en donde X tiene distribución uniforme en $[0,\theta]$. Para estimar θ se toman dos mediciones independientes X_1 y X_2 de X, y se considera el estimador $\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2\}$. Hallar el sesgo de $\hat{\theta}$.

(A) $-\theta/3$ **(B)** θ **(C)** $2\theta/3$ **(D)** 0 **(E)** $1/3$ **(F)** $-1/3$

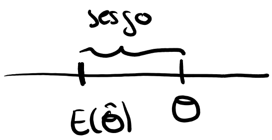
$X \sim U[0,\theta]$

X_1, X_2 MAS de X

$\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2\}$

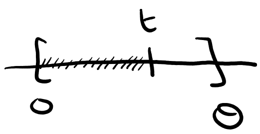
$\text{sesgo}(\hat{\theta}) = ?$

$\text{sesgo}(\hat{\theta}) = \underbrace{E(\hat{\theta})}_{?} - \theta$



• vamos a calcular la función de distribución de $\hat{\theta}$

$$F(t) = P(\hat{\theta} \le t) = P(\max\{X_1, X_2\} \le t)$$
$$= P(X_1 \le t,\ X_2 \le t)$$
$$= \underbrace{P(X_1 \le t)}_{= \frac{t}{\theta}}\ \underbrace{P(X_2 \le t)}_{= \frac{t}{\theta}} = \frac{t^2}{\theta^2}$$



• calculamos la función densidad de $\hat{\theta}$

$$F(t) = P(\hat{\theta} \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

$$f(t) = F'(t) = \frac{2t}{\theta^2}$$

• $$E(\hat{\theta}) = \int_0^{\theta} t\, f(t)\,dt = \int_0^{\theta} \frac{2t^2}{\theta^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\theta}$$

$$= \frac{2\theta^3}{3\theta^2}$$

$$= \frac{2}{3}\theta$$

- $$\text{sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$
$$= \frac{2}{3}\theta - \theta$$
$$= -\frac{1}{3}\theta$$