Práctico 10

martes, 7 de junio de 2022 9:27

$X_1, \dots, X_n$ MAS de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

① intervalo de confianza para μ si conocemos σ^2

$$\left[\overline{X}_n - \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

② intervalo de confianza para μ si no conocemos σ^2

$$\left[\overline{X}_n - \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot s_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cdot s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

donde $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$

idea:
buscamos un intervalo de confianza $1-\alpha$ para μ de la forma

$$\left[\overline{X}_n - ks_n, \overline{X} + ks_n\right]$$

$\overline{X}_n - ks_n$ μ $\overline{X}_n$ $\overline{X}_n + ks_n$

$$P(\mu \in [\overline{X}_n - ks_n, \overline{X}_n + ks_n]) = P(|\overline{X}_n - \mu| \leq ks_n)$$

$$= P(-ks_n \leq \overline{X}_n - \mu \leq ks_n)$$

$$= P\left(\frac{-ks_n}{s_n/\sqrt{n}} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{s_n/\sqrt{n}} \leq \frac{ks_n}{s_n/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-k\sqrt{n} \leq \frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{s_n} \leq k\sqrt{n}\right)$$

teorema: $\frac{(\overline{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{s_n}$ se distribuye como una T-Student con n-1 grados de libertad

la función de distribución de T-Student es F_T

$$P\left(\mu \in \left[\overline{X}_n - ks_n , \overline{X}_n + ks_n\right]\right) = F_T(k\sqrt{n}) - F_T(-k\sqrt{n})$$

$$= 2F_T(k\sqrt{n}) - 1$$

queremos $2F_T(k\sqrt{n}) - 1 = 1-\alpha$

$$\Rightarrow F_T(k\sqrt{n}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow k\sqrt{n} = F_T^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = t_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{t_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

entonces el intervalo de confianza tiene la forma

$$\left[\overline{X}_n - \frac{t_{\alpha/2}^{(n-1)}}{\sqrt{n}} s_n , \overline{X}_n + \frac{t_{\alpha/2}^{(n-1)}}{\sqrt{n}} s_n\right]$$

Ejercicio 7

Los contenidos de 7 recipientes similares de ácido sulfúrico son 9,8, 10,2, 10,4, 9,8, 10,0, 10,2 y 9,6 litros. Encontrar un intervalo de confianza $\underbrace{0{,}95}_{1-\alpha}$ para la media de todos los recipientes, suponiendo una distribución normal.

El intervalo de confianza $1-\alpha$ va a ser de la forma

$$\left[\overline{X}_n - \frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} s_n , \overline{X}_n + \frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} s_n\right]$$

donde $\alpha = 0{,}05$

$n = 7$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}_n)^2$$

$$\frac{(n-1)}{n} s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right) - \overline{X}_n^2$$

$$\Rightarrow s_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - n\overline{X}_n^2\right)$$

	X_i	X_i^2
	9,8	96,04
	10,2	104,04
	10,4	108,16
	9,8	96,04
	10	100
	10,2	104,04
	9,6	92,16
suma	70	700,48

$\overline{X}_n = 10$

$s_n^2 = \frac{1}{6}(700,48 - 7 \cdot 10^2) = 0,08$

$s_n = \sqrt{0,08} = 0,28$

$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0,025}(6) = 2,447$

r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.01}(r)$	$t_{0.005}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	$\boxed{2.447}$	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169

$$\frac{t_{\alpha/2}(n-1)\, s_n}{\sqrt{n}} = \frac{2,447 \cdot 0,28}{\sqrt{7}} = 0,26$$

el intervalo de confianza es:

$$[10 - 0,26 \,;\, 10 + 0,26]$$

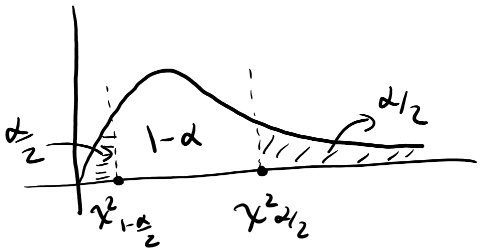
$$10 \pm 0,26$$

③ intervalo de confianza para σ^2

teorema: $X_1, \dots, X_n$ MAS de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

entonces $\dfrac{(n-1)\,S_n^2}{\sigma^2}$ tiene distribución χ^2 (chi-cuadrado) con

n-1 grados de libertad



$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)\,S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)\,S_n^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

el intervalo de confianza $1-\alpha$ para σ^2 es

$$\left[\frac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]$$

Ejercicio 10

Un fabricante de baterías para automóvil asegura que sus baterías duran, en promedio, 3 años con una varianza de un año. Si 5 de estas baterías tienen duraciones de 1,9, 2,4, 3,0, 3,5 y 4,2 años, determine un intervalo de confianza 0,95 para σ^2 e indique si es válida la afirmación del fabricante de que $\sigma^2 = 1$. Se supone que la población de las duraciones de las baterías se distribuye aproximadamente en forma normal.

el intervalo de confianza va a tener la forma

$$\left[\frac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^{2\,(n-1)}_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)\,S_n^2}{\chi^{2\,(n-1)}_{1-\alpha/2}}\right]$$

donde: $\alpha = 0{,}05$

$n = 5$

$n = 5$

X_i	X_i^2
1,9	3,61
2,4	5,76
3,0	9
3,5	12,25
4,2	17,64
suma: 15	48,26

$\overline{X}_n = 3$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right)$$

$$S_n^2 = \frac{1}{4}\left(48,26 - 5 \cdot 3^2\right)$$

$$= \frac{3,26}{4}$$

$$= 0,815$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0,025}(4) = 11,14$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0,975}(4) = 0,484$$

r	$\chi^2_{0.99}(r)$	$\chi^2_{0.975}(r)$	$\chi^2_{0.95}(r)$	$\chi^2_{0.90}(r)$	$\chi^2_{0.10}(r)$	$\chi^2_{0.05}(r)$	$\chi^2_{0.025}(r)$	$\chi^2_{0.01}(r)$
1	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.34
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.54	20.09
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.06	23.68	26.12	29.14

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}} = \frac{4 \cdot 0,815}{11,14} = 0,293$$

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{4 \cdot 0,815}{0,484} = 6,736$$

el intervalo de confianza es $[0,293;\ 6,736]$

es válido que σ^2 sea 1.

Ejercicio 11

1. Al probar 100 barras de acero que fabricó la compañía A se encuentra que 12 no cumplieron con las especificaciones.

   a) Determinar un intervalo de confianza 95 % para la proporción verdadera de las barras de acero que no cumplen las especificaciones.

   b) Si se desea estimar la proporción verdadera que no cumple con las especificaciones con una exactitud de 0,05 y una confianza de 0,95. ¿Cuántas barras se deben examinar?

X_i vale 1 si la barra i no cumple las especificaciones

X_i vale 0 si la barra i cumple las especificaciones

$$X_i \sim Ber(p)$$

$X_1 + \dots + X_n$ cuenta cuantas barras no cumplen las especificaciones

$\overline{X}_n$ es un estimador de p.

$$\boxed{\overline{X}_n \sim_{aprox} \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)}$$

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \underbrace{E(X_1 + \dots + X_n)}_{np} = p$$

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \underbrace{Var(X_1 + \dots + X_n)}_{nVar(X_1)} = \frac{1}{n^2} n\, p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

vamos a buscar un intervalo de confianza $1-\alpha$ de la forma

$$[\overline{X}_n - k, \overline{X}_n + k]$$

queremos:

$$P(p \in [\overline{X}_n - k, \overline{X}_n + k]) = 1 - \alpha$$

$$P(p \in [\overline{X}_n - k, \overline{X}_n + k]) = P(\overline{X}_n - k \leq p \leq \overline{X}_n + k)$$

$$= P(-k \leq -\overline{X}_n + p \leq k)$$

$$= P(-k \leq \overline{X}_n - p \leq k)$$

$$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$\sim \mathcal{N}(0,1)$

$\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$= P(-k \leq$

$$= P\left(\frac{-k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \overbrace{\frac{(\overline{X}_n - p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}}^{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \right)$$

$$= \phi\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{-k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$= 2\,\phi\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1$$

queremos $2\phi\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$$k = \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}}$$

el intervalo de confianza $1-\alpha$ para p

$$\left[\overline{X}_n - \frac{z_{1-\alpha/2}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}} \,,\; \overline{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}} \right]$$