Experimento = algo cuyo resultado no podemos predecir con certeza

por ejemplo: tirar un dado

Espacio muestral = el conjunto de todos los resultados posibles del experimento

ejemplo: si el experimento es tirar un dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento o sucesos = subconjunto del espacio muestral

= colección de resultados posibles

ejemplo:
- que el resultado sea par

  $A = \{2, 4, 6\}$
- que el resultado sea impar

  $B = \{1, 3, 5\}$

Decimos que dos eventos son incompatibles si no pueden ocurrir simultaneamente.

por ejemplo: A y B son incompatibles

Axiomas de Kolmogorov

Ω un espacio muestral cualquiera

una función P: Eventos $\longrightarrow [0,1]$ es una función de probabilidad si verifica:

1. $P(A) \geq 0$ para A evento cualquiera

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) si $\{A_k\}$ es una sucesión de eventos $\boxed{\text{incompatibles}}$ dos a dos entonces

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

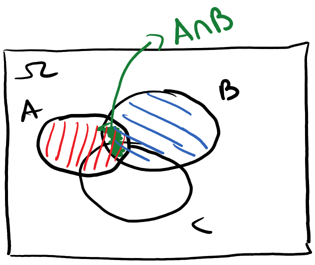
A y B eventos incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sean A, B y C sucesos. Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

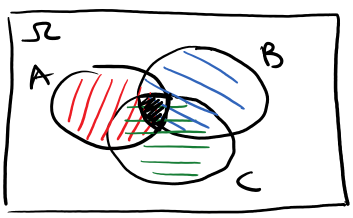
   (a) Ocurren A y B. $\longrightarrow$ ocurre A y ocurre B simultaneamente

   (b) Ocurren los tres sucesos.

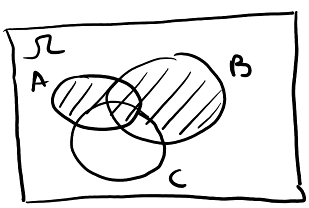
a) ocurren A y B : $A \cap B$



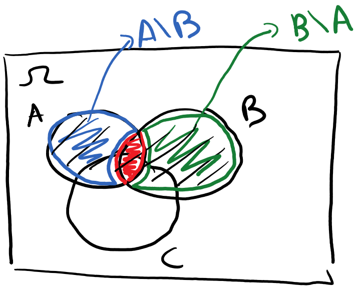
b) ocurren los tres sucesos : $A \cap B \cap C$



(c) Ocurre A u ocurre B. $A \cup B$



(e) Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente. $A \sqcup B$



$$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

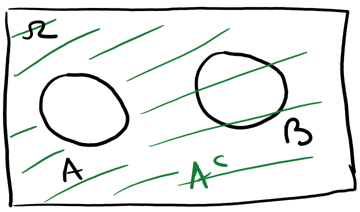
9. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran dos sucesos A y B tales que $\mathbb{P}(A) = 1/3$ y $\mathbb{P}(B) = 1/2$. Determinar el valor de $\mathbb{P}(A^C \cap B)$ en los siguientes casos:

   (a) A y B incompatibles (mutuamente excluyentes).

   (b) $A \subset B$.

   (c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

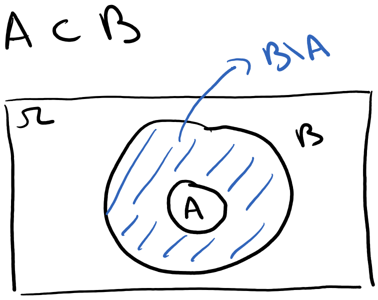
a) A y B incompatibles $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$



$$A^c \cap B = B$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) = 1/2$$

b) $A \subset B$



$$A^c \cap B = B \setminus A$$

$$B = \underbrace{A \cup (B \setminus A)}_{\text{unión de sucesos incompatibles}}$$

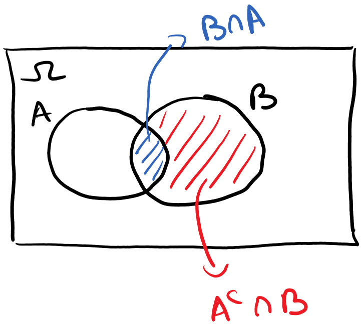
$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

$$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

$$= 1/2 - 1/3$$

c) $P(A\cap B) = 1/8$

$P(A^c\cap B) = ?$



$$B = \underbrace{(B\cap A) \cup (B\cap A^c)}_{\text{unión de eventos disjuntos}}$$

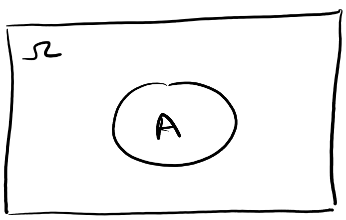
$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A^c)$$

$$P(B\cap A^c) = P(B) - P(B\cap A)$$
$$= 1/2 - 1/8$$

10. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $\mathbb{P}(A) = 3/8$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A\cap B) = 1/4$. Calcular:

(a) $\mathbb{P}(A^C)$ y $\mathbb{P}(B^C)$.
(b) $\mathbb{P}(A\cup B)$.
(c) $\mathbb{P}(A^C\cap B^C)$.
(d) $\mathbb{P}(A^C\cap B)$ y $\mathbb{P}(A\cap B^C)$.

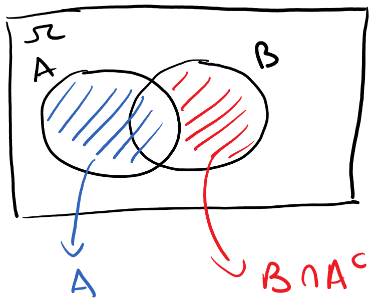
a) $P(A^c) = ?$



$$\Omega = A \cup A^c$$
$$P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$$
$$P(A^c) = P(\Omega) - P(A)$$
$$= 1 - P(A)$$
$$= 1 - 3/8$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 1/2$$

b) $P(A \cup B) = ?$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

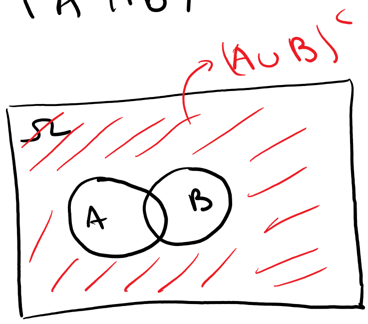
$$A \cup B = \underbrace{A \cup (B \cap A^c)}_{\text{unión de sucesos disjuntos}}$$

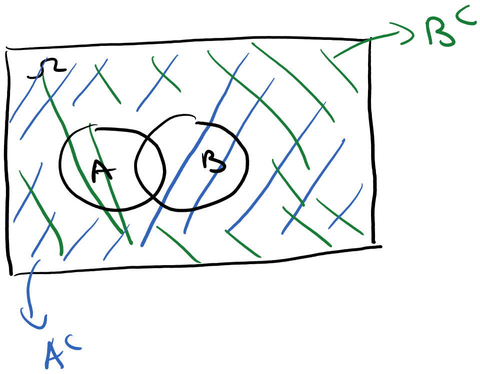
$$P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap A^c)}_{P(B) - P(A \cap B)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 3/8 + 1/2 - 1/4$$

c) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$

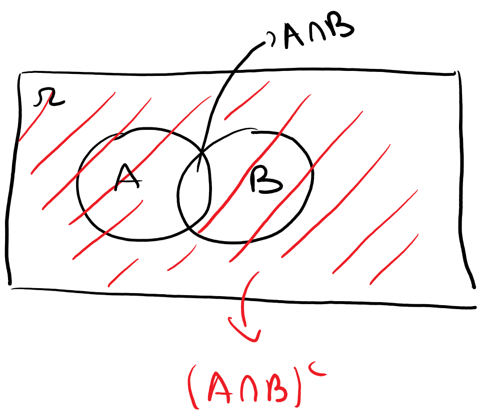


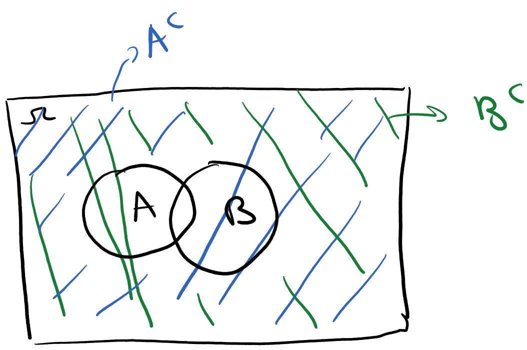


leyes de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$



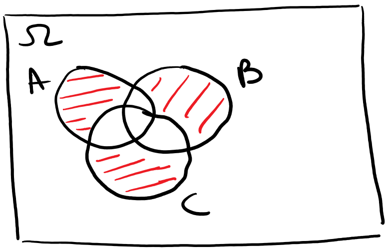


ejercicio 7 A, B, C sucesos

(j) Ocurre exactamente uno de los tres sucesos.

(k) Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

j)

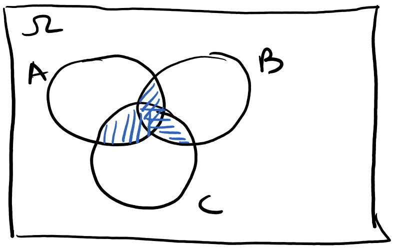


ocurre exactamente uno de los tres sucesos:

$$(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(A\cup C))\cup(C\setminus(A\cup B))$$

$$(A\cup B\cup C)\setminus((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C))$$

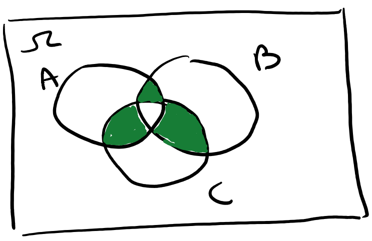
k) ocurren por lo menos dos de los tres sucesos



$$(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$$

ocurren exactamente dos de los tres sucesos

$$((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C))\setminus(A\cap B\cap C)$$



11. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

(a) * Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:

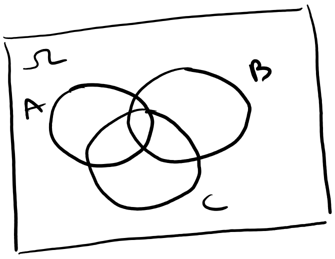
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(b) * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Ya vimos: $\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$



$$P(A\cup B\cup C) = P((A\cup B)\cup C)$$
$$= P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C))$$
$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - (P(A\cap C) + P(B\cap C) - P((A\cap C)\cap(B\cap C)))$$
$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

(b) * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Por inducción en n

caso base: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Paso inductivo: suponemos que vale para n-1 y queremos probar que vale para n

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = P\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cup A_n\Big)$$

$$= P\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) + P(A_n) - P\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n\Big)$$

hipótesis inductiva

$$= \Big[P(A_1) + P(A_2) \dots + P(A_{n-1}) - P(A_1 \cap A_2) - P(A \cap A_2) - \dots - P(A_{n-2} \cap A_{n-1}) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots \Big] + P(A_n) - P\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\Big)$$

hipótesis inductiva

$$= \Big[P(A_1) + \dots + P(A_{n-1}) - P(A_1 \cap A_2) - \dots - P(A_{n-2} \cap A_{n-1}) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots \Big] + P(A_n) - \Big(P(A_1 \cap A_n) + P(A_2 \cap A_n) + \dots + P(A_{n-1} \cap A_n) - P((A_1 \cap A_n) \cap (A_2 \cap A_n)) - P((A_1 \cap A_n) \cap (A_3 \cap A_n)) - \dots \Big)$$

$$= P(A_1) + \dots + P(A_{n-1}) + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \dots - P(A_1 \cap A_{n-1}) - P(A_1 \cap A_n) - P(A_2 \cap A_3) - \dots - P(A_2 \cap A_n) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap A_n) + \dots$$

12. Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

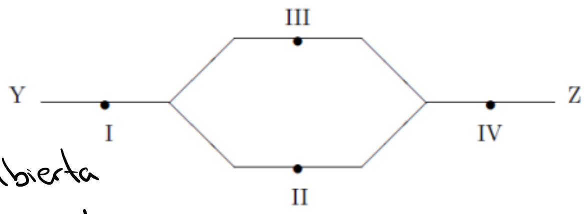
$\mathbb{P}$ (I abierta) $= \mathbb{P}$ (II abierta) $= \mathbb{P}$ (IV abierta) $= 0,55$,
$\mathbb{P}$ (III abierta) $= 0,36$,
$\mathbb{P}$ (I cerrada, II abierta) $= \mathbb{P}$ (I abierta, IV cerrada) $= \mathbb{P}$ (I cerrada, III abierta) $= 0,2$.

$\mathbb{P}$ (II abierta, IV abierta) $= 0,35$,
$\mathbb{P}$ (III abierta, IV cerrada) $= 0,26$.
$\mathbb{P}$ (II abierta, III abierta) $= 0$
$\mathbb{P}$ (I o II o IV abierta) $= 0,85$,
$\mathbb{P}$ (I o III o IV abierta) $= 0,87$.

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.

$\mathbb{P}$ (II abierta, IV abierta) = 0, 35,
$\mathbb{P}$ (III abierta, IV cerrada) = 0, 26.
$\mathbb{P}$ (II abierta, III abierta) = 0
$\mathbb{P}$ (I o II o IV abierta) = 0, 85,
$\mathbb{P}$ (I o III o IV abierta) = 0, 87.

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.



I_a = I abierta
I_c = I cerrada

formas de que un torrente lanzado de Y llegue a Z

- $I_a \cap III_a \cap IV_a$
- $I_a \cap II_a \cap IV_a$

$$P(\underbrace{(I_a \cap III_a \cap IV_a) \cup (I_a \cap II_a \cap IV_a)}_{\text{incompatibles porque } P(III_a \cap II_a) = 0})$$

$$P(I_a \cap III_a \cap IV_a) + P(I_a \cap II_a \cap IV_a) = ?$$

$$P(I_a \cup III_a \cup IV_a) = P(I_a) + P(III_a) + P(IV_a) - P(I_a \cap III_a) - P(I_a \cap IV_a) - P(III_a \cap IV_a) + \underline{P(I_a \cap III_a \cap IV_a)}$$