Ejercicio 8

2) $X_1, \dots, X_n$ MAS de X $\quad X \sim P(\lambda)$ $\quad P_X(k) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

buscamos el estimador por maxima verosimilitud de λ

- función de verosimilitud

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

- tomamos el logaritmo de la función de verosimilitud

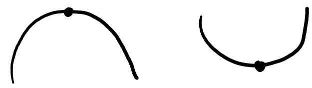
$$h(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \log L(\lambda)$$
$$= \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\log(e^{-\lambda}) + \log(\lambda^{x_i}) - \log(x_i!)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} -\lambda + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} -\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)$$
$$= -\lambda n + \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i!)$$

- el estimador por maxima verosimilitud de λ es

$$\hat{\lambda}_n = \operatorname{argmax} h(\lambda)$$

$$h'(\lambda) = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$h'(\lambda) = 0 \iff -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$



$$\iff \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = n$$

$$\iff \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

faltaría ver que $h''\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) < 0$

$$h''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \checkmark$$

$$\boxed{\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}_n}$$

(4) $X_1, \dots, X_n$ MAS de X donde $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

buscamos estimador por máxima verosimilitud de μ y de σ^2

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

- función de verosimilitud

$$L(\mu, \sigma^2, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

- tomamos el logaritmo de la función de verosimilitud

$$h(\mu, \sigma^2) = \log(L(\mu, \sigma^2))$$

$$= \log\left((2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}\right)$$

$$= \log\left((2\pi\sigma^2)^{-n/2}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\sum^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

- estimador de μ por máxima verosimilitud

$$\frac{\partial h(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$\frac{\partial h(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = 0 \iff \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}x_i - \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mu}_{} = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu = 0$$

$$\iff \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

entonces $\boxed{\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \overline{X}_n}$

- estimador de σ^2 :

$$\frac{\partial h(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2}\left(-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$\frac{\partial h(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = 0 \iff -n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\iff \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = n$$

$$\iff \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

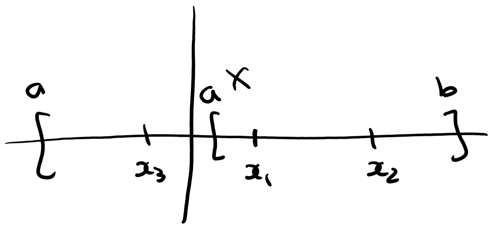
$$\Longleftrightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}_n)^2}$$

5) $X_1, \dots, X_n$ MAS de X donde $X \sim \mathcal{U}[a,b]$

buscamos estimador por máxima verosimilitud de a y b

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

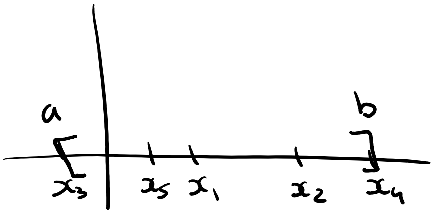


todas las observaciones $x_1, \dots, x_n$ tiene que estar en $[a,b]$

función de verosimilitud:

$$\mathcal{L}(a,b,x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n$$

cuanto más chico sea $b-a$ más grande es $L(a,b)$



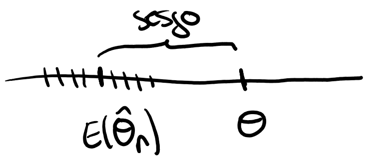
$$\hat{a}_n = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\hat{b}_n = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

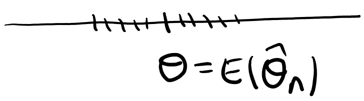
Sesgo de un estimador

$\hat{\theta}_n$ estimador de θ

$$\text{sesgo}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n) - \theta$$



decimos que $\hat{\theta}_n$ es insesgado si $\text{sesgo}(\hat{\theta}_n) = 0$ o equivalentemente si $E(\hat{\theta}_n) = \theta$



Ejercicio 7

Se considera una muestra $X_1, X_2, ..., X_n$ *iid* con media $\mathbf{E}(X) = \mu$ y varianza $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$. Se considera el estimador $\widehat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ (una combinación lineal de las observaciones).

1. Hallar la relación que tienen que cumplir los coeficientes a_i para que $\widehat{\mu}$ sea un estimador insesgado de la media μ.
2. Entre todos los estimadores lineales e insesgados de la media μ hallar el de varianza mínima. *Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores en $\mathbb{R}^n$.*

(1) queremos que se verifique: $E(\hat{\mu}) = \mu$

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{E(X_i)}_{\mu} = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i$$

para que $\hat{\mu}$ sea insesgado se tiene que verificar $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = 1}$

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n) = E(a_1 X_1) + E(a_2 X_2) + \dots + E(a_n X_n)$$
$$= a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + \dots + a_n E(X_n)$$

② queremos minimizar $Var(\hat{\mu})$ bajo la condición $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

$$Var(\hat{\mu}) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \underbrace{Var(X_i)}_{\sigma^2} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

las X_i son independientes

queremos minimizar $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ bajo la condición $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

Cauchy-Schwarz:

$u, v \in \mathbb{R}^n$ entonces $\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$

y se da el igual cuando u y v son colineales $u = \lambda v$

$$\left.\begin{array}{l} u = (a_1, \dots, a_n) \\ v = (b_1, \dots, b_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

---

tomamos $u = (a_1, \dots, a_n)$
$v = (1, \dots, 1)$

entonces:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}_{1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot n$$

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

se da el igual cuando u y v son colineales

o sea cuando $u = \lambda v = (\lambda, \dots, \lambda)$

$\Rightarrow$ se da el igual cuando $a_i = a_j$ para todo $i, j = 1, \dots, n$

$$\left.\begin{array}{l}\text{todos los } a_i \text{ son iguales} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\end{array}\right\} \Rightarrow a_i = \frac{1}{n} \quad \text{para todo } i$$

el estimador lineal de μ insesgado con varianza mínima es $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$

$$\hat{\mu} = \overline{X_n}$$

Ejercicio 6

Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* tales que $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathbf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$. Mostrar que $\overline{X}_n$ es insesgado como estimador de μ, que σ_n^2 no es insesgado como estimador de σ^2 y que s_n^2 es insesgado para σ^2.

- σ_n^2 no es un estimador insesgado de σ^2

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2$$

$$E(\sigma_n^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X_n}X_i + \overline{X_n}^2)\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X_n}\sum_{i=1}^{n}X_i + \sum_{i=1}^{n}\overline{X_n}^2\right)\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X_n}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X_n}^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\overline{X_n}^2 + \overline{X_n}^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X_n}^2\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right) - E(\overline{X_n}^2)$$

$E(X)^2 = \mu$

$E(X^2)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E(X_i^2)}_{E(X^2)} - E(\overline{X_n}^2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\cancel{n}\,E(X^2) - E\left(\frac{(X_1 + \dots + X_n)^2}{n^2}\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2}E((X_1 + \dots + X_n)^2)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + \sum_{i\neq j}X_iX_j\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2}\left(E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) + E\left(\sum_{i \neq j} X_i X_j\right)\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j)\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2}\left(n E(X^2) + \sum_{i \neq j} \underbrace{E(X_i) E(X_j)}_{= E(X)^2}\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n^2}\left(n E(X^2) + n(n-1) E(X)^2\right)$$

$$= E(X^2) - \frac{1}{n} E(X^2) - \frac{n-1}{n} E(X)^2$$

$$= \frac{n-1}{n} E(X^2) - \frac{n-1}{n} E(X)^2$$

$$= \frac{n-1}{n} \mathrm{Var}(X)$$

$$= \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$E(\sigma_n^2) = \sigma^2 \underbrace{- \frac{1}{n} \sigma^2}_{\text{sesgo de } \sigma_n^2}$$

$$\text{sesgo}(\sigma_n^2) = E(\sigma_n^2) - \sigma^2 = -\frac{1}{n}\sigma^2$$