Ejercicio 4
Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables independientes e idénticamente distribuidas.
Suponga que $\mathbf{E}(X_1) = 0$ y sea $Y_i = \dfrac{X_i + X_{i+1}}{2}$.
Demostrar que $\overline{Y}_n \xrightarrow[n]{c.s} 0$, aunque $Y_n,\ Y_{n+1}$ pueden ser dependientes para todo n.

$$E(Y_i) = E\left(\frac{X_i + X_{i+1}}{2}\right) = \frac{E(X_i) + E(X_{i+1})}{2} = 0$$

pero las Y_i no son independientes entonces no podemos usar la LFGN para decir $\overline{Y}_n \xrightarrow{cs} 0$

las X_i son independientes y $E(X_1) = 0$

entonces por la LFGN $\overline{X}_n \xrightarrow{cs} 0$

$$\overline{Y}_n \xrightarrow{cs} 0 \iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{cs} 0$$

$$\iff \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + X_{i+1}}{2} \xrightarrow{cs} 0$$

$$\iff \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i + X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0$$

$$\iff \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0 \quad \text{cierto}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} 0 \implies \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} 0$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0 \implies \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0$$

entonces $\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_{i+1} \xrightarrow{cs} 0$

Ejercicio 5
Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de v.a. *iid* con $\mathbf{E}(X_1) = a > 0$. Probar que entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n]{c.s.} +\infty$$

por la LFGN tenemos $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} E(X_1) = a$

$\Rightarrow P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow a\right) = 1$ $\quad \underbrace{Y_n \overline{X}_n} \xrightarrow{cs} \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow a \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \infty$$

tenemos $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow a\right\} \subset \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \infty\right\}$

entonces $P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \infty\right) = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{cs} \infty$$

Ejercicio 6
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ.

1. Hallar el límite casi seguro de $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$.

2. Hallar el límite casi seguro de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\sim \exp(\lambda)$

① $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \overline{X}_n^{\,2}$

por la LFGN : $\overline{X}_n \xrightarrow{cs} E(X_1) = \frac{1}{\lambda}$

$g(x) = x^2$ es continua entonces

$$g(\overline{X}_n) \xrightarrow{cs} g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$(\overline{X}_n)^2 \xrightarrow{cs} \frac{1}{\lambda^2}$$

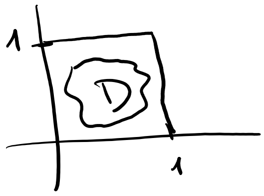
(2) límite casi seguro de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Sea $Y_i = X_i^2$

por la LFGN : $\overline{Y}_n \xrightarrow{cs} E(Y_1)$

$$E(Y_1) = E(X_1^2) = Var(X_1) + E(X_1)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \overline{Y}_n \xrightarrow{cs} E(Y_1) = E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

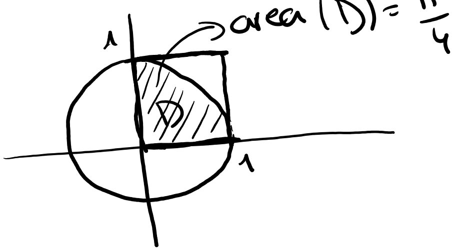


$U_1, U_2, \dots$ iid $\sim U([0,1]\times[0,1])$

$$a_n = \frac{\#\text{ puntos dentro de } D}{n}$$

$$a_n \xrightarrow{cs} \text{area } D$$

Aplicación: aproximación de π



sorteamos n puntos dentro del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$

$$a_n = \frac{\#\text{ puntos que caen en } D}{n}$$

$$4a_n \xrightarrow{cs} \pi$$

Primer parcial octubre 2020

Ejercicio 7

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución uniforme en el intervalo $[-1,1]$. Sea $\bar{X}_n$ el promedio. Aplicando la desigualdad de Chebyshev, hallar el menor valor de n que cumple $P(|\bar{X}_n| > 0.1) \leq 0.05$.

(A) 334 **(B)** 67 **(C)** 667 **(D)** 22 **(E)** 600

$X \sim U[a,b]$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Chebyshev: $P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)\right) = 0$$

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$$ porque las X_i son independientes

$$= \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + \dots + Var(X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} n \frac{1}{3} = \frac{1}{3n}$$

$$P(|\bar{X}_n| > 0{,}1) \leq 0{,}05$$

$$P(|\bar{X}_n| > 0{,}1) = P(|\bar{X}_n - \overbrace{E(\bar{X}_n)}^{=0}| > 0{,}1)$$

$$\leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{(0{,}1)^2}$$ por Chebyshev

$$= \frac{1}{3n(0{,}1)^2}$$

tomamos n tal que $\frac{1}{3n(0{,}1)^2} \leq 0{,}05$

$$\frac{1}{n} \leq 3(0{,}1)^2(0{,}05)$$

$$n \geq \frac{1}{3(0{,}1)^2(0{,}05)}$$

$$n \geq 666{,}6\dots$$

el menor valor de n es 667.