Práctico 7

martes, 10 de mayo de 2022

Esperanza de una variable aleatoria

Si X es discreta: $E(X) = \sum_{x \in R_X} x \, p_X(x)$

ejemplo: X = resultado de lanzar un dado

$R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$p_X(k) = \frac{1}{6}$ para $k \in \{1, \dots, 6\}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{21}{6} = 3,5 \qquad \boxed{E(X) = 3,5}$$

si X es continua: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, dx$

Propiedades:

- Linealidad: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

  $\Rightarrow E(aX + b) = aE(X) + b$

- si X e Y son independientes $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
- si X variable aleatoria y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $E(g(X))$ es finita

  si X es discreta: $E(g(X)) = \sum_{x \in R_X} g(x) \, p_X(x)$

si X es continua : $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

Ejercicio 3

La función de densidad de la variable aleatoria X que mide los diámetros de paso de los hilos de la rosca de una pieza está dada por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

1. ¿Cuál es el valor esperado de X?
2. Si ahora definimos una variable aleatoria Y tal que $Y = 3X + 1$, ¿cuál es el valor esperado de Y?

① $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{4x}{\pi(1+x^2)}\, dx$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$u = 1+x^2$

$du = 2x\,dx$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^2 \frac{1}{u}\, du$$

$$= \frac{2}{\pi} \log(u) \Big|_1^2$$

$\log = \ln$

$$= \frac{2}{\pi} \log(2)$$

② $Y = 3X+1$

$E(Y) = E(3X+1) = 3E(X) + 1 = \frac{6}{\pi} \log(2) + 1$

Ejercicio 4

1. Se eligen 5 números entre 1 y 20 y se sortea mediante bolilleros 5 números entre 1 y 20 (suponemos equiprobabilidad). Si salen los 5 números elegidos por nosotros (aunque sea en otro orden), ganamos 20 veces lo apostado; si salen 4 de los 5, ganamos 4 veces lo apostado; si salen 3 de los 5, ganamos el doble de lo apostado, y en cualquier otro caso perdemos lo apostado. (Atención: cuando decimos 'ganar' nos referimos a cuánto se nos paga, y no a la ganancia neta. En realidad, la ganancia neta se obtiene luego de restar lo apostado, por ej.: si acertamos los 5 números, la ganancia neta es 19 veces lo apostado.)

apostamos α

X = ganancia del juego (no la neta)

$R_X = \{20\alpha, 4\alpha, 2\alpha, 0\}$

X_{neta} = ganancia neta del juego

$R_{X_{neta}} = \{19\alpha, 3\alpha, \alpha, -\alpha\}$

$X_{neta} = X - \alpha \implies E(X_{neta}) = E(X) - \alpha$

Vamos a calcular la esperanza de X:

$p_X(20\alpha) = P(\text{salen los 5 numeros que elegimos}) = \dfrac{1}{C^{20}_5}$

$p_X(4\alpha) = P(\text{salen 4 de los cinco que elegimos}) = \dfrac{C^5_4 \cdot C^{15}_1}{C^{20}_5}$

$p_X(2\alpha) = P(\text{salen 3 de los cinco que elegimos}) = \dfrac{C^5_3 \cdot C^{15}_2}{C^{20}_5}$

$$E(X) = 20\alpha\, p_X(20\alpha) + 4\alpha\, p_X(4\alpha) + 2\alpha\, p_X(2\alpha)$$

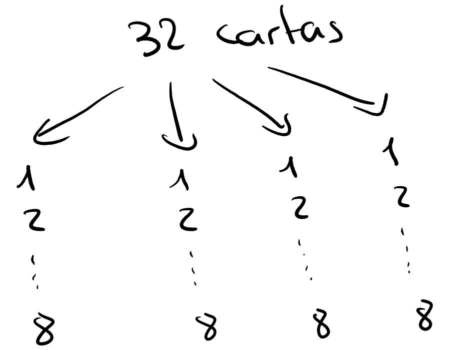
$$= 20\alpha \frac{1}{C^{20}_5} + 4\alpha \frac{C^5_4 \cdot C^{15}_1}{C^{20}_5} + 2\alpha \frac{C^5_3 \cdot C^{15}_2}{C^{20}_5}$$

$$= \frac{\alpha}{C_5^{20}} \left(20 + 4 \cdot C_4^5 \cdot C_1^{15} + 2\, C_3^5 \cdot C_2^{15} \right)$$

$$\approx 0{,}16\,\alpha$$

$$E(X_{neta}) = E(X - \alpha) = E(X) - \alpha \approx 0{,}16\alpha - \alpha = -0{,}84\,\alpha$$

2. Se eligen 5 cartas de un mazo de 32, si las 5 son del mismo color y en escalera (supongamos las cartas numeradas del 1 al 8; las escaleras son cuatro: 1 a 5, 2 a 6, 3 a 7, 4 a 8) ganamos 8 veces lo apostado, si obtenemos 5 cartas del mismo color pero no en escalera, ganamos 2 veces lo apostado; si obtenemos cartas en escalera pero no del mismo color, recuperamos lo apostado; en cualquier otro caso se pierde lo apostado. (Vale la misma precisión que en el juego anterior respecto de la ganancia y también suponemos equiprobabilidad.)



tipos de escaleras:

1 2 3 4 5

2 3 4 5 6

3 4 5 6 7

4 5 6 7 8

Y = ganancia del juego 2 (no la neta)

$R_Y = \{8\alpha, 2\alpha, \alpha, 0\}$

vamos a calcular la esperanza de Y:

$P_Y(8\alpha)$ = P(las cinco cartas son del mismo color y en escalera)

$$= \frac{\overset{\text{tipo}}{4} \cdot \overset{\text{color}}{4}}{C_5^{32}}$$

$P_Y(2\alpha)$ = P(las cinco cartas son del mismo color pero no en escalera)

$$= \frac{\overset{\text{color}}{4} \cdot C_5^8 - 4 \cdot 4}{C_5^{32}}$$

$P_Y(\alpha) = P($las cinco esten en escalera pero no sea del mismo color$)$

$$= \frac{4 \cdot 4^5 - 4 \cdot 4}{C_5^{32}}$$

1. tipo de escalera $\rightsquigarrow$ 4 posibilidades
2. asignarle un color a cada carta $\rightsquigarrow$ 4^5 formas

1 2 3 4 5

4 pos. 4 pos. 4 pos. 4 pos. 4 pos.

$$E(Y) = 8\alpha\, P_Y(8\alpha) + 2\alpha\, P_Y(2\alpha) + \alpha\, P_Y(\alpha)$$

$$= 8\alpha \frac{4 \cdot 4}{C_5^{32}} + 2\alpha \frac{4 \cdot C_5^{8} - 4 \cdot 4}{C_5^{32}} + \alpha \frac{4 \cdot 4^5 - 4 \cdot 4}{C_5^{32}}$$

$$= \frac{\alpha}{C_5^{32}} \left(8 \cdot 4 \cdot 4 + 2(4 \cdot C_5^{8} - 4 \cdot 4) + 4 \cdot 4^5 - 4 \cdot 4 \right)$$

$$\approx 0{,}02\, \alpha$$

Y_{neta} = la ganancia neta en el juego 2

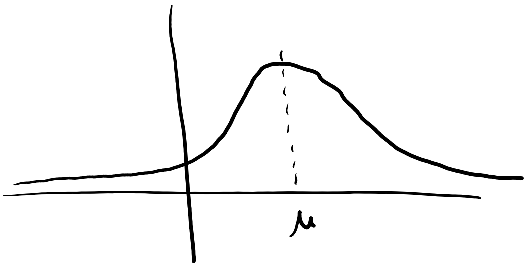
$$Y_{neta} = Y - \alpha$$

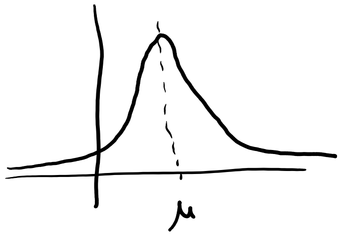
$$E(Y_{neta}) = E(Y) - \alpha \approx 0{,}02\alpha - \alpha = -0{,}98\alpha$$

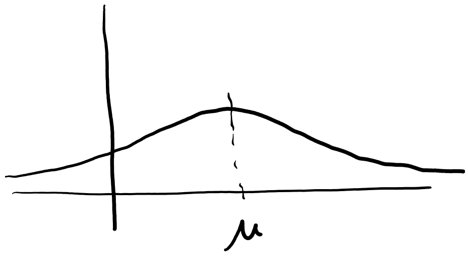
Varianza de una variable aleatoria

$N(\mu, \sigma^2)$

esperanza







$$\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$$E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2)$$
$$= E(X^2) + E(\underbrace{-2E(X)}_{\in \mathbb{R}}X) + \overbrace{E(\underbrace{E(X)^2}_{\in \mathbb{R}})}^{E(a)}$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$$
$$= E(X^2) - E(X)^2$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Propiedades:

- $\mathrm{Var}(X) \geq 0$
- $\mathrm{Var}(X) = 0 \Rightarrow$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(X = a) = 1$

- si X e Y son independientes $\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$
- $Var(X+a) = Var(X)$
- $Var(bX) = b^2 Var(X)$

Ejercicio 6

Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

1. $\mathcal{U}\{1,...,n\}$ (uniforme discreta)

$X \sim \mathcal{U}\{1,\dots,n\}$

$R_X = \{1,\dots,n\}$

$$P_X(k) = \begin{cases} 1/n & \text{si } k \in \{1,\dots,n\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n} + 3\cdot\frac{1}{n} + \dots + n\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}(1+2+3+\dots+n)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} X \text{ v.a. } \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in R_X} g(x) P_X(x) \end{array}}$$

$$E(X^2) = 1^2 P_X(1) + 2^2 P_X(2) + 3^2 P_X(3) + \dots + n^2 P_X(n)$$

$$= 1\cdot\frac{1}{n} + 2^2\cdot\frac{1}{n} + \dots + n^2\,\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}(1+2^2+\dots+n^2)$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$