PREGUNTA 4

En una escuela, el peso de los distintos alumnos se puede modelar como una variable aleatoria continua, en particular como una normal con valor medio 34kg, y desviación estándar 5kg ($\mu = 34, \sigma = 5$). En dicha escuela se utiliza una balanza para pesar a los alumnos que sólo puede tomar valores enteros. Más aún, al pesar a un alumno, la balanza retorna el peso de dicho alumno pero redondeado hacia abajo. Por ejemplo, si un alumno pesa 40kg la balanza retorna 40kg, pero si un alumno pesa 34.95kg la balanza retorna 34kg. Sea Y la variable aleatoria que indica el valor retornado por la balanza al pesar un alumno, encontrar k entero para el cual $P(Y > k) = 0.4207$.

$N(\mu, \sigma^2)$

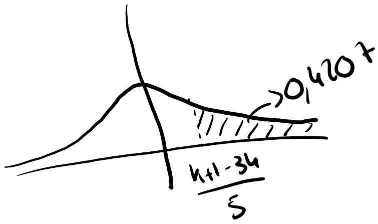
σ^2 varianza

σ = desviación estándar

X = peso del alumno $\quad X \sim N(34, 5^2)$

Y = X redondeado para abajo

$$P(Y > k) = P(Y \geq k+1) = P(X \geq k+1)$$



$$P(X \geq k+1) = 0,4207$$

$$\underbrace{P\Big(\overbrace{\frac{X-34}{5}}^{\sim N(0,1)} \geq \underbrace{\frac{k+1-34}{5}}\Big)}_{\displaystyle \|} = 0,4207$$

$$\overline{1 - P\left(\frac{X-34}{5} \leq \frac{k+1-34}{5}\right)} = 0,4207$$

$$\underbrace{P\left(\frac{X-34}{5} \leq \frac{k+1-34}{5}\right)}_{\phi\left(\frac{k+1-34}{5}\right)} = 0,5793 \quad \Rightarrow \quad \frac{k+1-34}{5} = 0,2$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	$\boxed{0.5793}$	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ejercicio 3
Se consideran dos variables aleatorias X e Y, que toman los valores 1, 2 y 3 cada una con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
1	0,02	0,08	c
2	a	0,08	0,1
3	0,06	b	0,3

P_X

1. Hallar a, b y c sabiendo que X e Y son independientes.
2. Calcular las funciones de probabilidad marginales.

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{P(X=1, Y=2)}^{P(X=1)P(Y=2)} = 0{,}08 \\ \underbrace{P(X=2, Y=2)}_{P(X=2)P(Y=2)} = 0{,}08 \end{array}\right\} \Rightarrow P(X=1) = P(X=2)$$

$$1 = 0{,}02 + 0{,}08 + c + a + 0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}06 + b + 0{,}3$$

$$\Rightarrow \boxed{a+b+c = 0{,}36}$$

X e Y independientes $\Rightarrow P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$

$$P(X=2, Y=1) = a$$

$$P(X=2, Y=1) = P(X=2)P(Y=1) = (a+0{,}08+0{,}1)(a+0{,}02+0{,}06)$$

$$a = (a+0{,}18)(a+0{,}08)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 0{,}02 \\ a = 0{,}72 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{a = 0{,}02}$$

$$P(X=1, Y=3) = c$$

$$P(X=1, Y=3) = P(X=1)P(Y=3)$$
$$= (0{,}1+c)(c+0{,}4)$$

$$c = (0{,}1+c)(c+0{,}4)$$

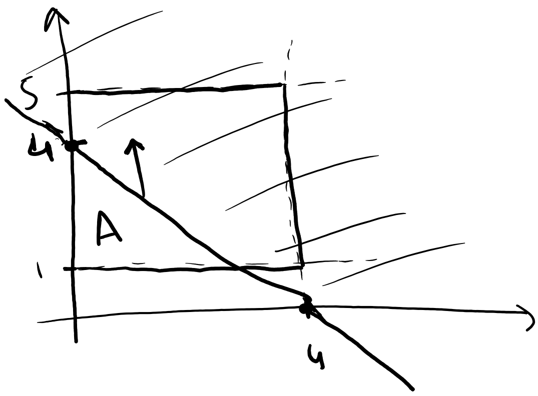
$$\left\{\begin{array}{l} c = 0{,}1 \\ c = 0{,}4 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{c = 0{,}1}$$

Ejercicio 7
Se considera la siguiente función $f_{XY}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{si } x \in (0,4) \quad y \in (1,5) \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

1. Hallar k para que f_{XY} sea la función de densidad conjunta de dos absolutamente continuas.
2. Hallar las densidades (marginales) f_X y f_Y.
3. Hallar la distribución conjunta F_{XY} y la distribuciones (marginales)
4. ¿X e Y son independientes? Justifique la respuesta.
5. Calcular $\mathbf{P}\{X \geq 3, Y \leq 2\}$ y $\mathbf{P}\{X + Y > 4\}$.

$X+Y>4 \Rightarrow Y > -X+4$



$$P(X+Y>4) = 1 - P(X+Y \leq 4) = 1 - \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Ejercicio 10 (3 puntos)

Sea X una variable con distribución uniforme en el intervalo $(-1,3)$.

Sea $p_Y(y)$ la densidad de $Y = X^2$. Calcular $p_Y(4)$.

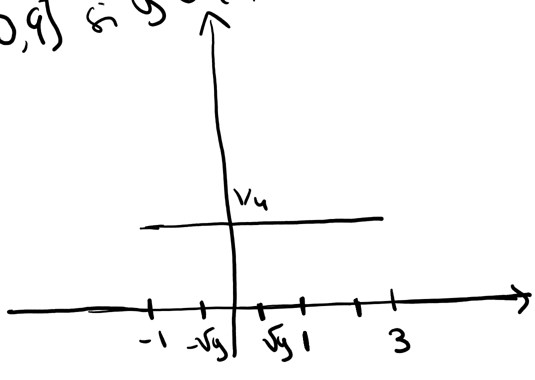
(A) 0 **(B)** 1/20 **(C)** 1/16 **(D)** 1/8 **(E)** 1/4 **(F)** 4

$X \sim U(-1,3)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in (-1,3) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

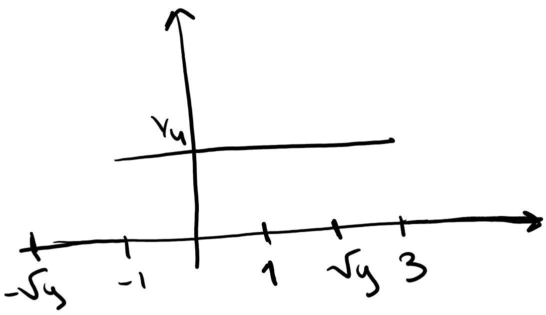
$Y = X^2 \rightsquigarrow Y$ toma valores en $[0,9]$ si $y \in (0,1)$

vamos a buscar F_Y



$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(X^2 \leq y)$$

si $y \in (1,9]$



$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}\,dx & \text{si } y \in (0,1] \\ \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}\,dx & \text{si } y \in (1,9] \\ 1 & \text{si } y \geq 9 \end{cases}$$

si $y \in (1,9]$: $F_Y(y) = \displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4} x \Big|_{-1}^{\sqrt{y}}$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{y} + 1)$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{8\sqrt{y}}$$

$$f_Y(4) = \frac{1}{8\sqrt{4}} = \frac{1}{16}$$

Ejercicio 11 (4 puntos)

Dos monedas falsificadas de igual peso se mezclan con 8 monedas idénticas auténticas. El peso de cada una de las monedas falsificadas es diferente del peso de cada una de las monedas auténticas. Se selecciona un par de monedas al azar sin reposición de las 10 monedas. Luego se selecciona un segundo par al azar sin reposición de las 8 monedas restantes.

¿Cuál es la probabilidad de que las 4 monedas seleccionadas sean auténticas, dado que el peso combinado del primer par es igual al peso combinado del segundo par?

(A) $9/13$ **(B)** $15/19$ **(C)** $1/2$ **(D)** $11/15$ **(E)** $15/16$ **(F)** $7/11$

formas de que el peso del primer par sea igual al peso del segundo:

→ las 4 monedas sean auténticas A

→ $\left.\begin{cases} \text{en el primer par: 1 falsa y 1 autentica} \\ \text{en el segundo par: 1 falsa y 1 auténtica} \end{cases}\right\}$ B

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}$$

$$P(A) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}}$$

$$P(B) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}\binom{7}{1}\binom{1}{1}}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}} = \frac{8\cdot 2\cdot 7\cdot 1}{\binom{10}{2}\binom{8}{2}}$$

$$P(\text{4 monedas son auténticas} \mid \text{peso combinado} =) = \frac{P(\text{4 monedas auténticas})}{P(\text{peso combinado} =)}$$

$$= \frac{P(\text{4 monedas auténticas})}{P(A)+P(B)}$$

$$= \frac{\dfrac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{\cancel{\binom{10}{2}\binom{8}{2}}}}{\dfrac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{\cancel{\binom{10}{2}\binom{8}{6}}} + \dfrac{8\cdot 2\cdot 7\cdot 1}{\cancel{\binom{10}{2}\binom{8}{2}}}}$$