Ejercicio 4

Se consideran dos variables aleatorias: X, que toma los valores -1 y 1, e Y que toma los valores 0 , 1 y 2 con las probabilidades conjuntas dadas en la siguiente tabla:

X/Y	0	1	2
-1	0,4	0,2	0,1
1	0,05	a	0,15

1. Hallar a.
2. Hallar las funciones de probabilidad marginales de X e Y.
3. Hallar la función de probabilidad conjunta de $U = X + Y$ y $V = X - Y$
4. Hallar las funciones de probabilidad marginales de U y V

(1) $0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 + a + 0{,}15 = 1$

$\Rightarrow a = 1 - 0{,}9 \Rightarrow \boxed{a = 0{,}1}$

(2)

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
-1	0,4	0,2	0,1	0,7
1	0,05	0,1	0,15	0,3
P_Y	0,45	0,3	0,25	

(3) $U = X + Y$, $V = X - Y$

valores que toma U : $\{-1, 0, 1, 1, 2, 3\}$

valores que toma V : $\{-1, -2, -3, 1, 0, -1\}$

$U \backslash V$	-3	-2	-1	0	1	P_U
-1	0	0	0,4	0	0	0,4
0	0	0,2	0	0	0	0,2
1	0,1	0	0	0	0,05	0,15
2	0	0	0	0,1	0	0,1
3	0	0	0,15	0	0	0,15
P_V	0,1	0,2	0,55	0,1	0,05	

$$U = -1 \iff X = -1,\ Y = 0 \implies V = -1$$

$$U = 0 \iff X = -1,\ Y = 1 \implies V = -2$$

$$U = 1 \iff \underbrace{X = -1,\ Y = 2}_{\Downarrow \atop V = -3} \quad \text{o} \quad \underbrace{X = 1,\ Y = 0}_{\Downarrow \atop V = 1}$$

$$U = 2 \iff X = 1,\ Y = 1 \implies V = 0$$

5. ¿Son X e Y independientes?

6. ¿Son U y V independientes?

⑤

X\Y	0	1	2
−1	0,4	0,2	0,1
1	0,05	0,1	0,15

$$\underbrace{P(X=-1, Y=0)}_{0,4} \stackrel{?}{=} \underbrace{P(X=-1)}_{0,7}\, \underbrace{P(Y=0)}_{0,45}$$

$$0,4 \neq 0,7 \cdot 0,45$$

$\Rightarrow$ X e Y no son independientes

⑥ $P(U=-1, V=-3) = 0$

pero $P(U=-1) \neq 0$ y $P(V=-3) \neq 0$

$\Rightarrow$ U y V no son independientes

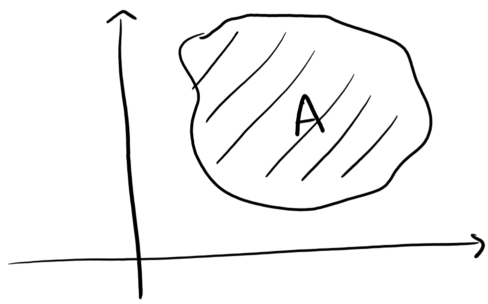
Distribución conjunta (continuas)

X, Y variables aleatorias continuas

$f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ función de densidad conjunta

- $f_{X,Y}$ integrable
- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\iint_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$



- funciones de densidad marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

- función de distribución

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X\leq x, Y\leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$

- funciones de distribución marginales

$$F_X(x) = P(X\leq x) = \text{“} P(X\leq x, Y\leq \infty) \text{”}$$

$$= \lim_{y\to\infty} P(X\leq x, Y\leq y)$$

$$= \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

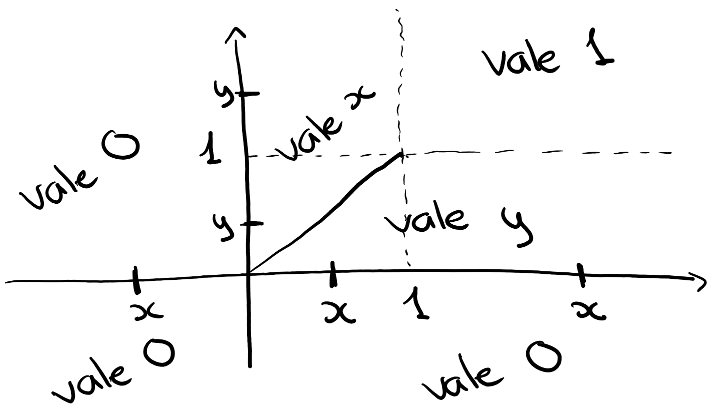
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y)$$

Ejercicio 5

1. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1,\ y \geq 1 \\ y & \text{si } y \in [0,1),\ x \geq y \\ x & \text{si } x \in [0,1),\ y \geq x \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Hallar la distribuciones marginales F_X y F_Y.



$$F_X(x) = \underbrace{\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y)}_{\text{"} P(X \leq x,\ Y \leq \infty) \text{"}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x & \text{si } x \in [0,1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 1 \\ y & \text{si } y \in [0,1) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 7

Se considera la siguiente función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} kxy & \text{si } x \in (0,4) \quad y \in (1,5) \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

1. Hallar k para que f_{XY} sea la función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X, Y absolutamente continuas.
2. Hallar las densidades (marginales) f_X y f_Y.
3. Hallar la distribución conjunta F_{XY} y la distribuciones (marginales) F_X y F_Y.
4. ¿X e Y son independientes? Justifique la respuesta.
5. Calcular $\mathbf{P}\{X \geq 3, Y \leq 2\}$ y $\mathbf{P}\{X + Y > 4\}$.

(1)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^5\int_0^4 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^5\int_0^4 kxy\,dx\,dy$$

$$= \int_1^5 ky\int_0^4 x\,dx\;dy$$

$$= \int_1^5 ky\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\,dy$$

$$= 8k\int_1^5 y\,dy$$

$$= 8k\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^5$$

$$= 4k(25-1)$$

$$= 96k \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{96}}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{96}xy & \text{si } x \in (0,4),\ y \in (1,5) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(2)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \overset{x\in(0,4)}{=} \int_1^5 f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$= \int_1^5 \frac{1}{96}xy\,dy$$

$$= \frac{1}{96}x \left.\frac{y^2}{2}\right|_1^5$$

$$= \frac{1}{96}x\,\frac{25-1}{2}$$

$$= \frac{12}{96}x$$

$$= \frac{1}{8}x$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } x \in (0,4) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \overset{y\in(1,5)}{=} \int_0^4 \frac{1}{96}xy\,dx$$

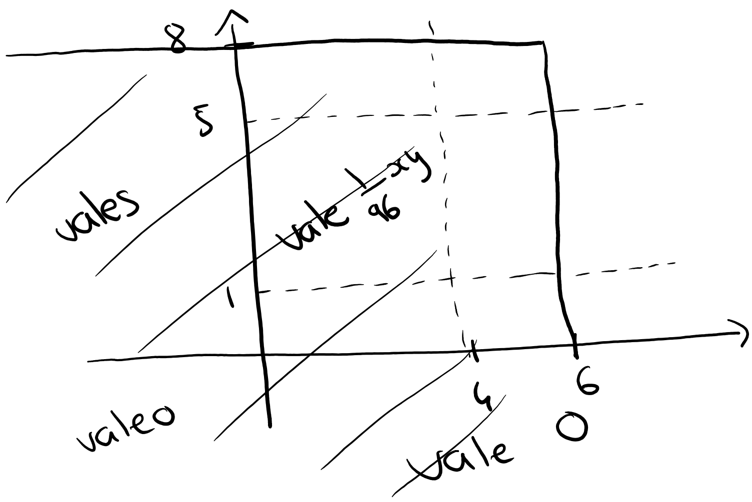
$$= \frac{1}{96}\, y\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{12}\, y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{12} y & \text{si } y \in (1,5) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(3) $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

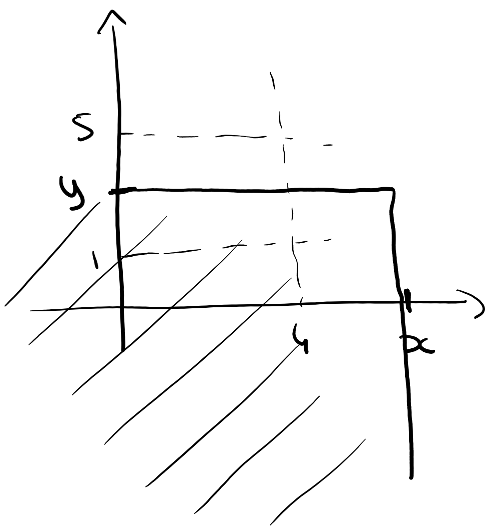
$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\, dt\, ds$$



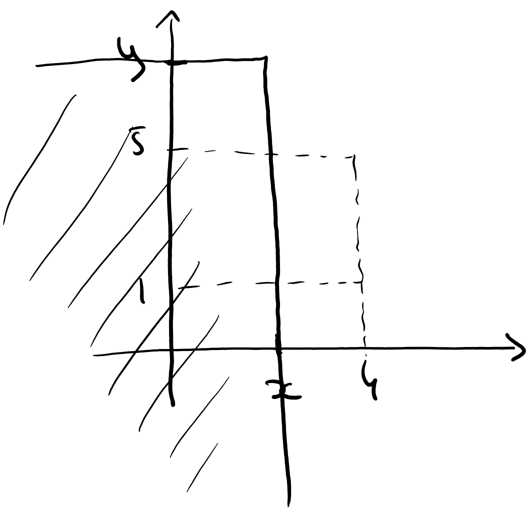
$f_{X,Y}(x,y)$

$F_{X,Y}(6,8) = 1$

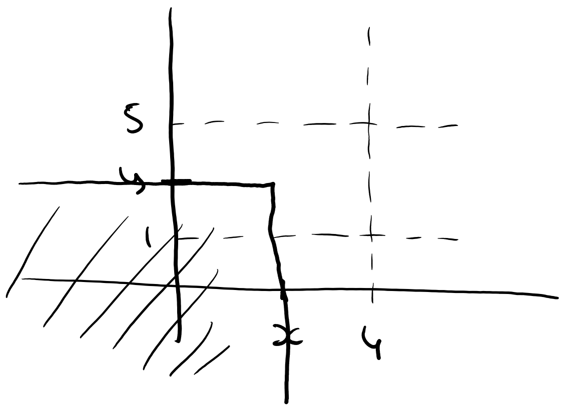
$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 4,\ y \geq 5 \\ \displaystyle\int_0^4 \int_1^y \frac{1}{96} st \, dt \, ds & \text{si } x \geq 4,\ y \in (1,5) \\ \displaystyle\int_0^x \int_1^5 \frac{1}{96} st \, dt \, ds & \text{si } y \geq 5,\ x \in (0,4) \\ \displaystyle\int_0^x \int_1^y \frac{1}{96} st \, dt \, ds & \text{si } y \in (1,5),\ x \in (0,4) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



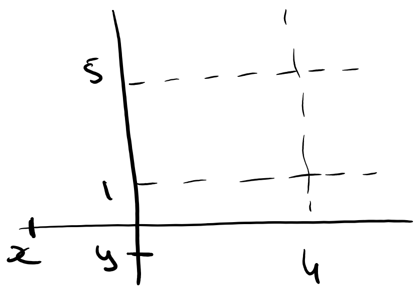
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t) \, dt \, ds$$
$$= \int_0^4 \int_1^y f_{X,Y}(s,t) \, dt \, ds$$



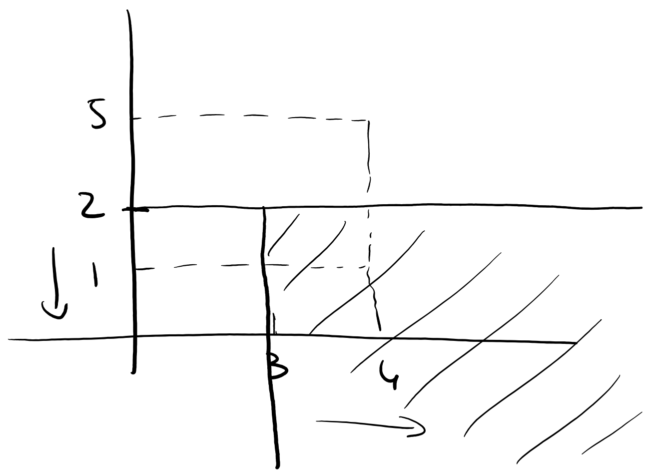
$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$
$$= \int_0^x \int_1^5 f_{X,Y}(s,t) \, dt \, ds$$



$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_0^x \int_1^y f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$



5. Calcular $\mathbf{P}\{X \geq 3, Y \leq 2\}$ y $\mathbf{P}\{X + Y > 4\}$.

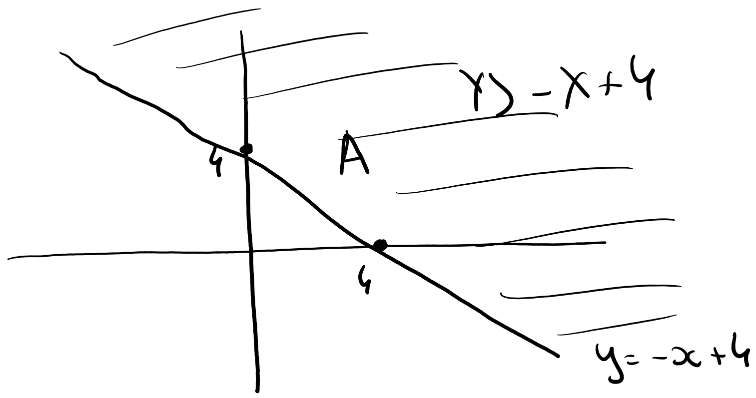


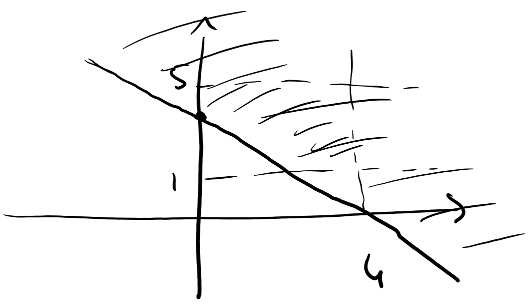
$$P(X \geq 3, Y \leq 2) = \int_3^{+\infty} \int_{-\infty}^{2} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{96} xy\,dy\,dx$$

$P(X+Y>4)$

$X+Y>4 \Rightarrow Y>-X+4$





$$P(X+Y>4) = \iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \int_{-x+4}^{+\infty} \frac{1}{96} xy \, dy \, dx$$