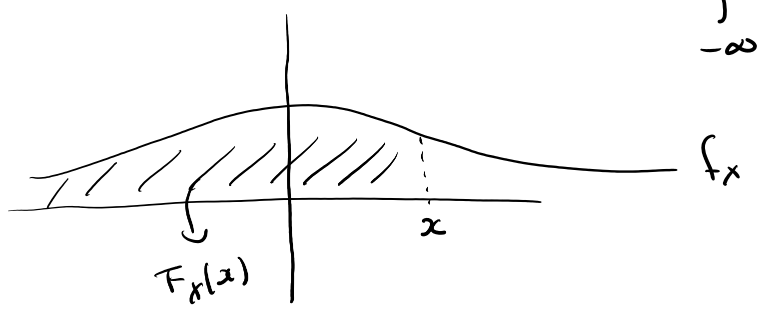
X absolutamente continua

f_X función de densidad: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

F_X función de distribución: $F_X(x) = P(X \leq x)$

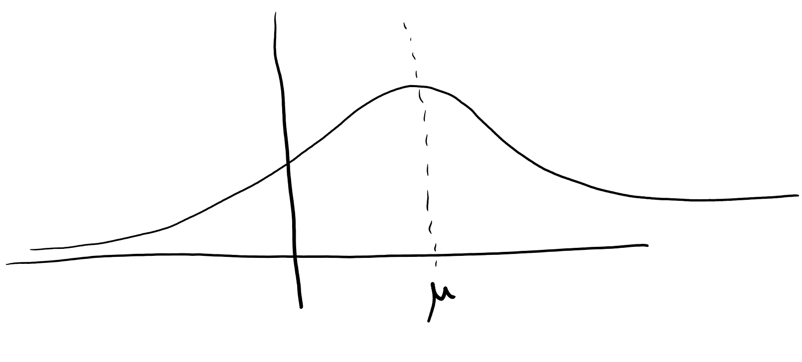
$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$



Distribución normal

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

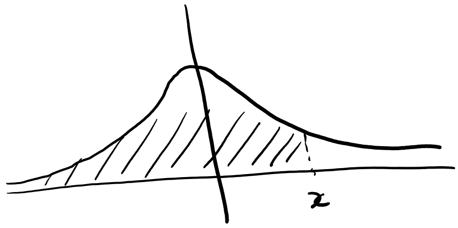


$\rightarrow F_X$ no tiene una fórmula

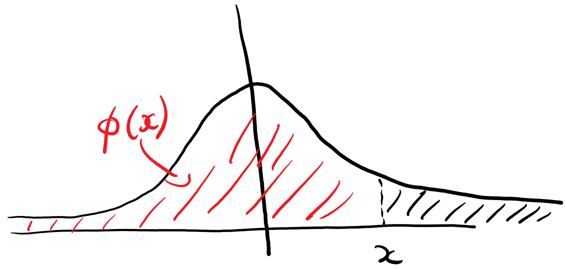
$Z \sim N(0,1)$

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = \phi(x)$$

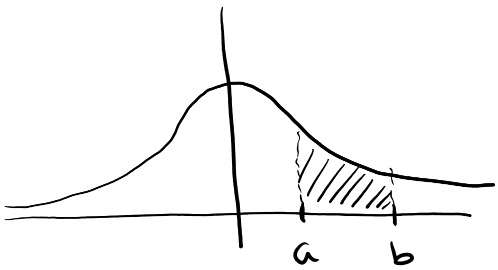
$$P(Z \leq x) = \phi(x)$$



$$P(Z \geq x) = 1 - P(Z \leq x) = 1 - \phi(x)$$

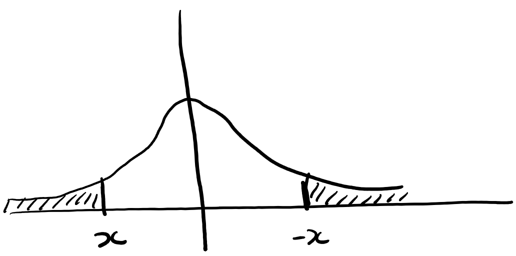


$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a) = \phi(b) - \phi(a)$$



- si $x < 0$

$$P(Z \leq x) = P(Z \geq -x) = 1 - \phi(-x)$$



• si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{b-\mu}{\sigma} \right)$$

$$= \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Ejercicio 6

1. En la densidad normal estándar, encuentre el área bajo la curva que está:

   a) a la derecha de $z = 1{,}84$.

   b) entre $z = -1{,}97$ y $z = 0{,}86$.

2. Si $Z \sim N(0,1)$, encuentre los valores de k de tal forma que:

   a) $\mathbf{P}(Z > k) = 0{,}3015$

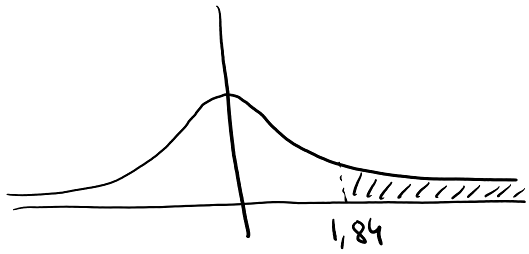
   b) $\mathbf{P}(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$

3. En una distribución normal con $\mu = 40$ y $\sigma = 6$, encuentre el valor de x que tiene:

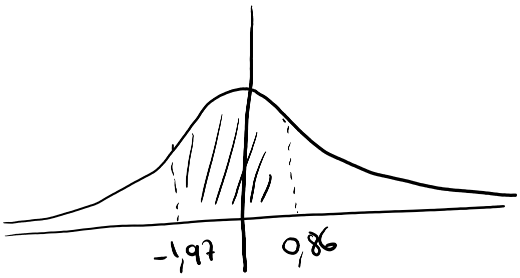
   a) 45 % del área a la izquierda.

   b) 14 % del área a la derecha.

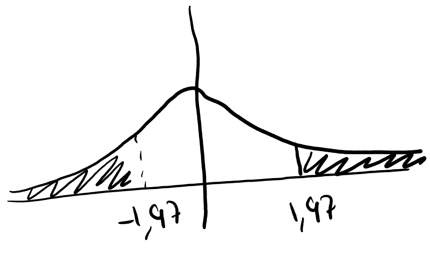
(1) a) $Z \sim N(0,1)$



$$P(Z \geq 1{,}84) = 1 - P(Z \leq 1{,}84)$$
$$= 1 - \phi(1{,}84)$$
$$= 1 - 0{,}9671$$



$$P(-1{,}97 \leq Z \leq 0{,}86) = P(Z \leq 0{,}86) - P(Z \leq -1{,}97)$$
$$= \phi(0{,}86) - \phi(-1{,}97)$$



$$= \phi(0{,}86) - (1 - \phi(1{,}97))$$
$$= \phi(0{,}86) - 1 + \phi(1{,}97)$$
$$= 0{,}8051 - 1 + 0{,}9756$$

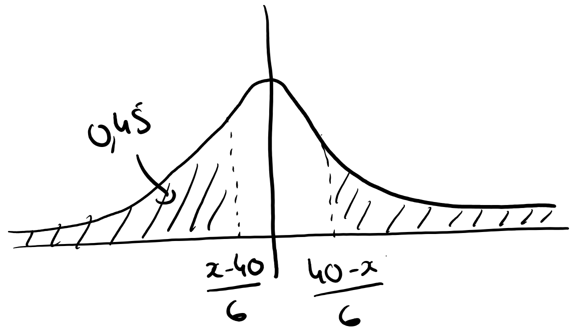
(3) a) $X \sim N(40, 6^2)$

buscamos x tal que $P(X \leq x) = 0{,}45$

$$P(X \leq x) = 0{,}45$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{X-40}{6}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{x-40}{6}\Big) = 0,45$$

$$\phi\left(\frac{x-40}{6}\right) = 0,45$$



$$1-\phi\left(\frac{40-x}{6}\right) = 0,45$$

$$\phi\left(\frac{40-x}{6}\right) = 0,55$$

$$\phi(0,12) = 0,5478$$

$$\phi(0,13) = 0,5517$$

$$0,12 < \frac{40-x}{6} < 0,13$$

$$-39,28 < -x < -39,22$$

$$\boxed{39,22 < x < 39,28}$$

$X \sim N(40, 6^2)$

buscamos x tal que $P(X \geq x) = 0,14$

$$P(X \geq x) = 0{,}14$$

$$P\Big(\underbrace{\frac{X-40}{6}}_{\sim N(0,1)} \geq \frac{x-40}{6}\Big) = 0{,}14$$

$$1 - \phi\left(\frac{x-40}{6}\right) = 0{,}14$$

$$\phi\left(\frac{x-40}{6}\right) = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$$

$$\phi(1{,}08) = 0{,}8599$$

$$\phi(1{,}09) = 0{,}8621$$

$$1{,}08 < \frac{x-40}{6} < 1{,}09$$

Ejercicio 8

Una cierta máquina produce resistencias eléctricas que tienen un valor medio de 40Ω y una desviación estándar de 2Ω. Suponga que los valores de las resistencias siguen una distribución normal.

1. ¿Qué porcentaje de las resistencias tendrán un valor que exceda de 43Ω?
2. Si al medir el valor de las resistencias, el medidor redondea la medida al valor entero más cercano (en Ω), ¿qué porcentaje de las resistencias será considerada como mayores de 43Ω?

X = valor de la resistencia $\qquad Z = \dfrac{X-40}{2} \sim N(0,1)$

$X \sim N(40, 2^2)$

1. $P(X > 43) = P\Big(\underbrace{\frac{X-40}{2}}_{\sim N(0,1)} > \frac{43-40}{2}\Big)$

$$= P\left(Z > \frac{43-40}{2}\right)$$

$$= 1 - P(Z < 1{,}5)$$

$$= 1 - 0{,}9332$$

$$= 0{,}0668$$

$$\boxed{6{,}68\ \%}$$

$$② \quad P(X > 42{,}5) = P\Big(\underbrace{\frac{X-40}{2}}_{\sim N(0,1)} > \frac{42{,}5-40}{2}\Big)$$

$$= P(Z > 1{,}25)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}25)$$

$$= 1 - 0{,}8944$$

$$= 0{,}1056$$

$$\boxed{10{,}56\ \%}$$

Distribución conjunta

X, Y variables aleatorias

la función de probabilidad conjunta se define como

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

- $\sum_{\substack{x \in R_X \\ y \in R_Y}} P_{X,Y}(x,y) = 1$

- $P_X(x) = P(X=x) = \sum_{y \in R_Y} P_{X,Y}(x,y)$

  $P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x \in R_X} P_{X,Y}(x,y)$

  funciones de probabilidad marginales

- X e Y independientes : $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$

  $\Rightarrow P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\,P_Y(y)$

Ejercicio 1

Se considera un grupo de 9 personas de las cuales hay 2 que son contadores y 3 que son abogados. Se eligen al azar 5 personas de ese grupo de 9. Se definen: X = Cantidad de contadores en las 5 personas elegidas e Y = Cantidad de abogados en las 5 personas elegidas

1. ¿Qué valores pueden tomar las variables aleatorias X e Y?
2. Construir la función de probabilidad (puntual) conjunta de X e Y.
3. A partir de b), halle las funciones de probabilidad (puntual) marginales de X e Y.
4. Calcular $P\{X = Y\}$
5. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

9 personas $\begin{cases} 2 \text{ contadores} \\ 3 \text{ abogados} \\ 4 \text{ otros} \end{cases}$

se eligen 5 personas

X = cantidad de contadores entre los 5

Y = cantidad de abogados entre los 5

1 valores que puede tomar X : $\{0,1,2\}$

valores que puede tomar Y : $\{0,1,2,3\}$

(2)

X\Y	0	1	2	3	P_X
0	P(X=0, Y=0) 0	$\frac{C^3_1 C^4_4}{C^9_5}$	$\frac{C^3_2 C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^3_3 C^4_2}{C^9_5}$	"sumar las entradas de esta fila"
1	$\frac{C^2_1 C^4_4}{C^9_5}$	$\frac{C^2_1 C^3_1 C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^2_1 C^3_2 C^4_2}{C^9_5}$	$\frac{C^2_1 C^3_3 C^4_1}{C^9_5}$	
2	$\frac{C^2_2 C^4_3}{C^9_5}$	$\frac{C^2_2 \cdot C^3_1 C^4_2}{C^9_5}$	$\frac{C^2_2 C^3_2 C^4_1}{C^9_5}$	$\frac{C^2_2 C^3_3}{C^9_5}$	
P_Y	"sumar las entradas de esta columna"				

(3) función de probabilidad marginal de X:

$$P_X(0) = P(X=0)$$
$$= P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3)$$
$$= 0 + \frac{C^3_1}{C^9_5} + \frac{C^3_2 C^4_3}{C^9_5} + \frac{C^3_3 C^4_2}{C^9_5}$$

(4) $P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2)$

(5) $P(X=0, Y=0) = 0$

pero $P(X=0) \neq 0$ y $P(Y=0) \neq 0$

$\Rightarrow P(X=0, Y=0) \neq P(X=0)\,P(Y=0)$

$\Rightarrow$ X e Y no son independientes