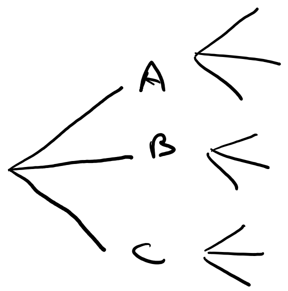
① Regla del producto

Si una tarea se realiza en dos etapas, la primera se puede realizar de m maneras distintas y para cada una de ellas la segunda etapa se puede realizar de n manera distintas entonces la tarea se puede realizar de $m \times n$ formas distintas



3×3

② Arreglos de k en n

¿De cuántas formas podemos construir $\boxed{\text{listas ordenadas}}$ de k elementos distintos a partir de un conjunto de n elementos?

$$\underbrace{\text{posibilidades}}^{n} \quad \underbrace{\text{posibilidades}}^{n-1} \quad \underbrace{\text{posibilidades}}^{n-2} \quad \cdots \quad \underbrace{\text{posibilidades}}^{n-k+1}$$

1er elemento — 2do elem. — 3er elem. — k-ésimo elemento

$$\#\text{ listas ordenadas} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

$$A_k^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

$$\boxed{A^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

(3) Combinaciones de k en n

listas no ordenadas

¿ De cuántas formas podemos construir subconjuntos de k elementos (distintos) a partir de un conjunto de n elementos ?

$\{A, B, C, D\}$

$\{A, B, C\} \longrightarrow$ (A, B, C) (B, A, C) (C, A, B) (A, C, B) (B, C, A) (C, B, A)

subconjunto listas ordenadas

a partir de un subconjunto de 3 elementos podemos construir 6 listas ordenadas

$$6 = 3! = A^3_3$$

subconjunto de k elementos $\longrightarrow$ $A^k_k = k!$ listas ordenas

$$\boxed{C^n_k = \binom{n}{k} = \frac{A^n_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

④ Resta de la suma

tenemos dos tareas, una se puede realizar de m formas distintas, la otra se puede realizar de n formas distintas y ambas tareas son <u>independientes</u> entonces hay m+n formas distintas de realizar alguna de las dos tareas

3. En una fábrica los productos se codifican con 3 letras distintas que indican 3 operaciones que sufren cada uno de los productos y 3 cifras distintas y en ese orden: primero las letras y después los números. Las letras utilizadas son A, B, C y D.

(a) ¿Cuántos productos pueden codificarse?

(b) ¿Cuántos códigos empiezan con A y terminan con 9?

(c) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos y en ese orden?

(d) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos?

(e) ¿En cuántos productos aparecen dos números pares juntos y el otro es impar?

a)

$$\overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\4\\\text{posibilidades}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\3\\\text{posibilidades}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\2\\\text{posibilidades}}}{\_\_\_}}^{\text{3 letras distintas}}\ \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\10\\\text{pos.}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\9\\\text{pos.}}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\8\\\text{pos.}}}{\_\_\_}}^{\text{3 cifras distintas}}$$

$$\#\text{codigos} = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = A^4_3\cdot A^{10}_3$$

b)

$$\overbrace{\underset{A}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\3p.}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\2p.}}{\_\_\_}}^{\text{letras }\neq}\ \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\9p.}}{\_\_\_}\ \underset{\substack{\uparrow\\8p.}}{\_\_\_}\ \underset{9}{\_\_\_}}^{\text{cifras }\neq}$$

$$\#\text{ codigos que empiezan con A y terminan con } 9 = 3\cdot 2\cdot 9\cdot 8$$
$$= A^3_2\cdot A^9_2$$

c)

$$\overbrace{\underbrace{\ \ \ \ }_{4\text{ pos}}\ \underbrace{\ \ \ \ }_{3\text{ pos}}\ \underbrace{\ \ \ \ }_{2\text{ pos}}}^{\text{letras} \neq}\ \overbrace{\underbrace{0}\ \underbrace{2}\ \underbrace{\ \ \ \ }_{8\text{ pos.}}}^{\text{cifras} \neq} \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$$

$$\overbrace{\underbrace{\ \ \ \ }_{4\text{ pos.}}\ \underbrace{\ \ \ \ }_{3\text{ pos.}}\ \underbrace{\ \ \ \ }_{2\text{ pos.}}}^{\text{letras} \neq}\ \overbrace{\underbrace{\ \ \ \ }_{8\text{ pos.}}\ \underbrace{0}\ \underbrace{2}}^{\text{cifras} \neq} \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$$

$\#$ codigos $= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$

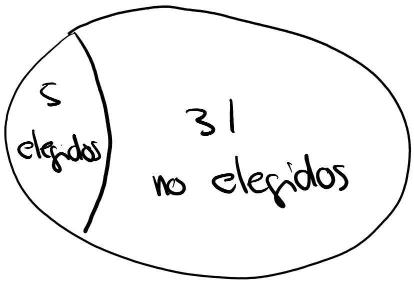
5. Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 36 posibilidades.

(a) ¿Cuántas jugadas posibles hay?

(b) Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?

(c) Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos 2 de los números elegidos?

a) $\#$ jugadas $= C^{36}_{5}$



b) $C^{5}_{1} \cdot C^{31}_{4}$

C^{5}_{1}: formas de tomar uno de los cinco numeros elegidos

C^{31}_{4}: formas de tomar 4 numeros entre los 31 que no elegimos

$\#$ jugadas que contienen por lo menos dos de los numeros elegidos $= \#$ jugadas que contienen exactamente 2 $+$ $\#$ jugadas que contienen exactamente 3 + # jugadas que contienen exactamente 4 + # jugadas que contienen exactamente cinco

$$= C^5_2 \cdot C^{31}_3 + C^5_3 \cdot C^{31}_2 + C^5_4 \cdot C^{31}_1 + \underbrace{C^5_5}_{=1}$$

formas de tomar 2 de los 5 numeros elegidos

formas de tomar 3 numeros entre los 31 que no habiamos elegido

jugadas que contienen por lo menos 2 de los 5 numeros elegidos = # jugadas posibles − # jugadas que no contienen ninguno de los cinco − # jugadas que contienen exactamente uno de los cinco

$$= C^{36}_5 - C^{31}_5 - C^5_1 \cdot C^{31}_4$$

$$C^5_2 \cdot C^{34}_3$$

numeros elegidos: $\overline{7, 8}, 21, \overline{28, 30}$

21	28	7	1	19
7	21	28	1	19

6. * Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

(a) ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer?

(b) Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha + \beta + \gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿de duántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ). ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima? (Sugerencia: ver como varía dicha cantidad al variar en una unidad alguno de los parámetros)

a) $*$ = bizcocho

$$\underbrace{*_1\ *_2\ *_3}_{\text{croissants}}\ |_1\ \underbrace{*_4\ *\ *\ *\ *\ *}_{\text{margaritas}}\ |_2\ \underbrace{*\ *\ *}_{\text{galletas}}$$

12 $*$

2 $|$

14 elementos

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{croissants}}\ |\ \underbrace{*\ *\ *\ *}_{\text{margaritas}}\ |\ \underbrace{*\ *\ *\ *\ *\ *\ *}_{\text{galletas}}$$

$$\#\ \text{elecciones} = \frac{14!}{2!\,12!} = \underbrace{CR_3^{12}}$$

formas de dividir 12 bizcochos en 3 categorías distintas

b) α croissants

β margaritas

γ galletas

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \text{ croissants}\\ \beta \text{ margaritas}\\ \gamma \text{ galletas}\end{array}\right\}\ \alpha + \beta + \gamma = 12$$

formas de repartir los bizcochos = $\underbrace{C^{12}_{\alpha}} \cdot \underbrace{C^{12-\alpha}_{\beta}} \cdot C^{12-\alpha-\beta}_{\gamma}$ "1"

formas de escoger las α personas que les va a tocar croissant

formas de escoger las β personas que les toca margarita

queremos encontrar los valores de α, β y γ que maximizan

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = C^{12}_{\alpha} \cdot C^{12-\alpha}_{\beta}$$

$$= \frac{12!}{\alpha!\,\cancel{(12-\alpha)!}} \cdot \frac{\cancel{(12-\alpha)}!}{\beta!\,(12-\alpha-\beta)!}$$

$$= \frac{12!}{\alpha!\,\beta!\,(12-\alpha-\beta)!} = \frac{12!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$

entonces buscamos α, β, γ que minimicen

$$\begin{cases} g(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha!\,\beta!\,\gamma! \\ 0 \leq \alpha \leq 12 \\ 0 \leq \beta \leq 12-\alpha \\ 0 \leq \gamma \leq 12-\alpha-\beta \end{cases}$$

si $\alpha = \beta = \gamma = 4$ $\quad g(\alpha, \beta, \gamma) = 4!\,4!\,4!$

---

si $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$:

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = 5!\,4!\,3!$$
$$= 5\cdot 4!\,4!\,3!$$
$$= 4!\,4!\,\underbrace{(5\cdot 3!)}_{> 4!}$$
$$> 4!\,4!\,4!$$