Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 2 - Transformaciones de Möbius

1.
   a) Pruebe que la única transformación de Möbius que tiene más de 2 puntos fijos ($f(z) = z$) es la identidad.
   b) Mostrar que dados tres puntos z_0, z_1, z_2 en $\overline{\mathbb{C}}$ existe una única transformación de Möbius f que cumple $f(z_0) = 0$, $f(z_1) = 1$ y $f(z_2) = \infty$.
   c) Mostrar que dados tres puntos z_0, z_1, z_2 en $\overline{\mathbb{C}}$ y tres puntos w_0, w_1, w_2 en $\overline{\mathbb{C}}$ existe una única transformación de Möbius tal que $f(z_0) = w_0$, $f(z_1) = w_1$ y $f(z_2) = w_2$.
2.
   a) Hallar la transformación de Möbius tal que: $f(0) = -1$, $f(i) = 0$ y $f(\infty) = 1$
   b) Determine la imagen de los siguiente conjuntos para esta transformación:
      - El eje imaginario.
      - El semiplano derecho.
      - El semiplano izquierdo.
      - El eje real.
      - El semiplano superior.
      - La recta $\{z : Im(z) = 1\}$
3. Hallar una tranformación de Möbius g tal que: 1 e i son puntos fijos y $g(0) = -1$
4. Sea $T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Mobius tal que
$$T(z) = \frac{2z - i}{-iz - 2}$$
   a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Probar que $T(D) = D$.
   b) Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las rectas por el origen. Probar que existe un único elemento r_0 de $\mathcal{F}$ tal que $T(r_0)$ es una recta.
   c) Hallar explícitamente la recta $T(r_0)$.
5. Sea T una transformación de Möbius diferente de la identidad. Probar que:
   a) $T(0) = 0$, $T(\infty) = \infty \Leftrightarrow T(z) = az$.
   b) $T(\infty) = \infty$ y es el único punto fijo $\Leftrightarrow T$ es una traslación.
   c) $T(0) = \infty$ y $T(\infty) = 0 \Leftrightarrow T(z) = \dfrac{a}{z}$.
   d) Mostrar que las únicas transformaciones de Möbius que fijan el 0 y mantienen distancia son la rotaciones.
   e) Describir geométricamente la transformación $f(z) = 1/z$.
6. Mostrar que dadas dos curvas cualesquiera que se cortan en un punto el ángulo que forman se conserva por una transformación de Möbius (es decir, toda transformación de Möbius es conforme).
7. Sea T de Möbius que transforma el eje real en el mismo. Probar que existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ tales que $T(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$. En otras palabras, el conjunto de transformaciones de Möbius que fija el eje real son aquellas que se pueden escribir con coeficientes reales, y ninguna otra.

8. *a*) Probar que las tranformaciones de Möbius que llevan el semiplano superior en el disco unidad son de la forma $T(z) = e^{i\beta}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$.

   b) Probar que las tranformaciones de Möbius que llevan el disco unidad en el disco unidad son de la forma $T(z) = e^{i\beta}\dfrac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$ con $\beta \in \mathbb{R}$ y $|\alpha| < 1$.

   Sugerencia: usar que las transformaciones de Möbius preservan puntos simétricos o inversos.

9. Sea $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformación de Möbius tal que $\phi(2) = 2$, $\phi(1-i) = 2+i$ y $\phi(1+i) = \infty$.

   a) Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ una circunferencia. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\phi(\mathcal{C})$ sea una recta.

   b) Sea $\mathcal{C} := (\partial B(1,1))=$ borde de la bola de centro 1 y radio 1. Halle $\phi(\mathcal{C})$.

   c) Hallar $\phi(\{z \in \mathbb{C} :\ |z-3/2| = 1/2\})$.

   d) ¿Existe $z \in B(1,1)$ tal que $|\phi(z)| = 1$? Justifique.

   (*Sugerencia: No es necesario encontrar una fórmula explícita para* ϕ)