6/6

Teorema del Límite Central

TLC

$\{X_n\}$ i.i.d. , $\mu = E(X_1)$, $\sigma^2 = Var(X_1)$

Si $Z := \left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right)\sqrt{n} \xrightarrow[n]{d} N(0,1)$

Convergencia en distribución

Ejercicio 1

Se realiza una encuesta para tratar de estimar el porcentaje de votos de determinado candidato. Al final de la misma se tendrán n respuestas, representadas en la muestra $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de realizaciones de la variable de Bernoulli de parámetro p (la probabilidad de que una persona elegida al azar en la población vote por el candidato en cuestión).

$\bar{X}_n = p$

1. A partir de la mencionada muestra ¿Qué valor usaría usted para estimar p?.
2. Usando la Desigualdad de Chevishoff (y antes de tomar la muestra) ¿Cuántos datos tomaría para que, con una probabilidad de al menos 0,95, el estimador no distara del valor de p más de un 0,03?. (Sugerencia: Demuestre y use que para cualquier valor de $p \in [0,1]$ se cumple $p(1-p) \leq 1/4$).
3. Usando el Teorema del Límite Central resolver la parte anterior y comparar con el resultado obtenido por la Desigualdad de Chevishoff. *(Las dos primeras partes de este ejercicio fueron resueltas en el práctico 8).*

$P(\{|\bar{X}_n - p| > \varepsilon\}) \leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}$

$P(\{|X - E(X)| > \varepsilon\}) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

Con Chevishoff llegamos a que $n > 5000$

Estimamos p con $\overline{X}_n$.

Queremos el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(|\overline{X}_n - p| < 0{,}03) \geq 0{,}95$$

$$\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)\sqrt{n} \underset{n \text{ grande}}{\approx} N(0,1)$$

$$P\left(\left(\frac{-0{,}03}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n} < \left(\frac{\overline{X}_n - \overbrace{p}^{E(\overline{X}_n)=p}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n} < \left(\frac{0{,}03}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n}\right) \geq 0{,}95$$

$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = p(1-p)$

Queremos encontrar $n \in \mathbb{N}$ para que

$$P\left(\left(\frac{-0{,}03}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n} < \underbrace{\left(\frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n}}_{\approx N(0,1)} < \left(\frac{0{,}03}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)\right) \geq 0{,}95$$

$$\{\omega \in \Omega : |\overline{X}_n(\omega) - p| \geq 0{,}03\}$$

$$\|$$

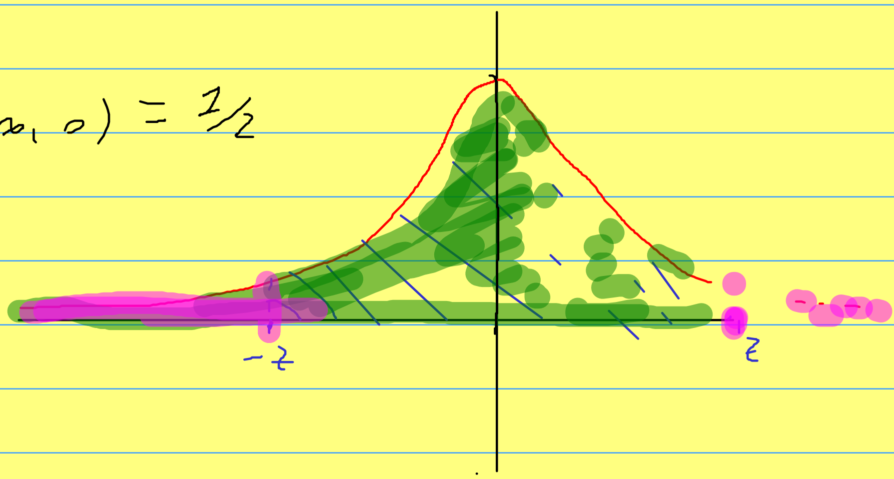
$$\left\{\omega \in \Omega : \left(\frac{-0{,}03}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n} < \left(\frac{\overline{X}_n(\omega) - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n} < \left(\frac{0{,}03}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n}\right\}$$

Sabemos $p(1-p) \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{p(1-p)} \ge \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \ge \sqrt{4} = 2$$

$$P\left(\underbrace{2(-0{,}03)\sqrt{n}}_{-z} < \left(\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\sqrt{n} < \underbrace{2(0{,}03)\sqrt{n}}_{z}\right) \ge 0{,}95$$

$P(-\infty, 0) = 1/2$



$$P(-z < Z < z) = P(-\infty, z) - P(z, +\infty)$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} - P(z, +\infty)\right] \ge 0{,}95$$

$$\frac{1}{2} - P(z, +\infty) \ge \frac{(0{,}95)}{2}$$

$$P(z, +\infty) \le -\frac{(0{,}95)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1-0{,}95}{2}$$

$$= \frac{0{,}05}{2}$$

$$= 0{,}025$$

Buscamos z tal que $P(z, +\infty) \leq 0{,}025$

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036

$z = 1{,}96$

$$\left.\begin{array}{l} z = 1{,}96 \\ z = 0{,}06\sqrt{n} \end{array}\right\} \quad n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}06}\right)^2$$

$$= \left(\frac{196}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{6}\right)^2 \simeq 1067{,}1$$

Entonces $\boxed{n \geq 1068}$

Ejercicio 2

Los resistores de cierto tipo tienen resistencias que en promedio son de $\mu = 200$ ohms, con una desviación estándar de $\sigma = 10$ ohms. Se toman (al azar) 25 de estos resistores y se conectan (en forma independiente) en un circuito.

E $\quad \sqrt{Var}$

1. Calcular la probabilidad (aproximada) de que la resistencia promedio de los 25 resistores este entre 199 y 202 ohms.

   $\bar{X}_{25}$

2. Calcular la probabilidad (aproximada) de que la resistencia total de los 25 resistores no sea mayor que 5100 ohms.

1) $P(199 < \bar{X}_n < 202)$

$=$

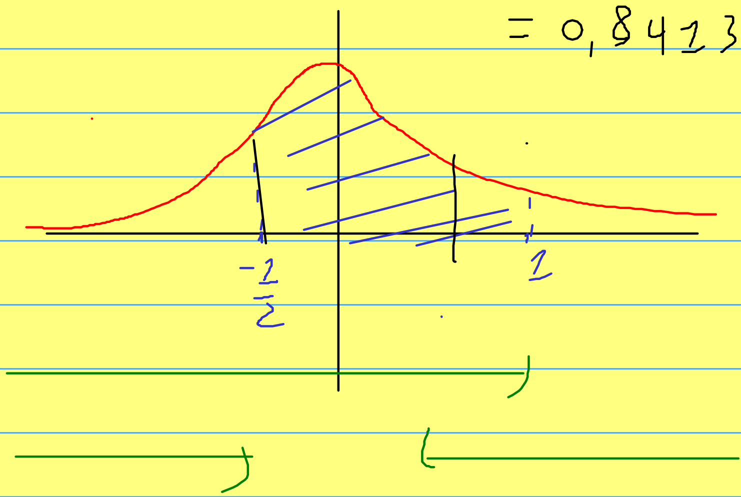
$$P\left(\underbrace{\left(\frac{199-200}{10}\right)\sqrt{25}}_{-1\cdot 5} < \frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{25}}{\sigma} < \underbrace{\left(\frac{202-200}{10}\right)\sqrt{25}}_{2\cdot 5}\right)$$

$\approx N(0,1)$ por TCL

$=$

$$P\left(-\frac{1}{2} < Z < 1\right) = P(Z < 1) - P\left(Z > \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0{,}8413 - 0{,}3805$$



$$\begin{array}{r} 0{,}8413 \\ -\ 0{,}3805 \\ \hline 0{,}4608 \end{array}$$

2. Calcular la probabilidad (aproximada) de que la $\underbrace{\text{resistencia total}}_{R_T}$ de los 25 resistores no sea mayor que 5100 ohms.

$$R_T = \sum_{j=1}^{25} X_j = 25\,\overline{X}_{25}$$

$$P\left(R_T \leq 5100\right) \qquad P\left(\overline{X}_{25} \leq 204\right)$$

$$P\left(\underbrace{\boxed{\frac{R_T}{25}}}_{\overline{X}_{25}} \leq \frac{5100}{25}\right)$$

Ejercicio 3

Si $X_1, \ldots, X_n$ *iid* $\sim$ exp(5) y n es muy grande, ¿a qué distribución se aproxima la distribución de $\overline{X}_n$?

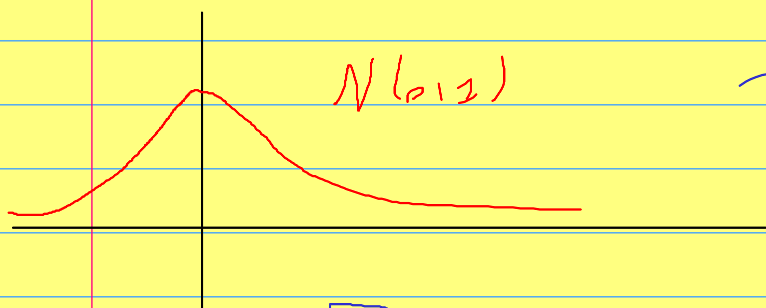
para n grande

$$\underbrace{\left(\frac{\overline{X}_n(\omega)-\mu}{\sigma}\right)\sqrt{n}}_{Z(\omega)} \approx N(0,1)$$

$$\overline{X}_n \approx N(0,1)\cdot \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} + \mu$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\, N(0,1)$$



$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\, N(0,1) + \mu$$

$$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda} = \mu$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \sigma^2$$