18/5

Ejercicio 5
Si a ud. le dicen que el 12 % de la población está desempleada, el 48 % tiene un solo empleo, el 35 % tiene dos empleos y el 5 % tiene tres, y por otra parte en una muestra tomada al azar, de manera independiente, de 1400 personas resulta que el promedio de empleos por persona es 2.04. ¿Usted qué diría? ¿Le parece que algún dato puede estar mal, o no? Si algún dato puede estar mal, ¿de cuáles sospecharía? ¿Qué tipos de errores podría contener la información? Si además, entre esas 1400 personas hay 312 desempleados, ¿qué respondería a las preguntas anteriores?

100 %

Desempleados		12 %
1	Empleo	48 %
2	Empleos	35 %
3	"	5 %

X = "Cantidad de empleos"

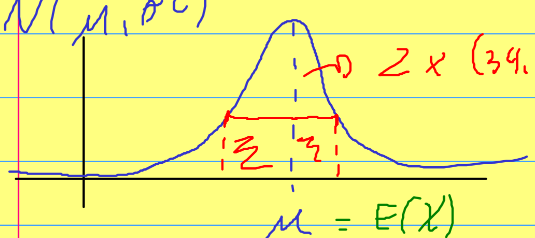
$Rec(X) = \{0, 1, 2, 3\}$

$p_X(0) = 0{,}12$
$p_X(1) = 0{,}48$
$p_X(2) = 0{,}35$
$p_X(3) = 0{,}05$

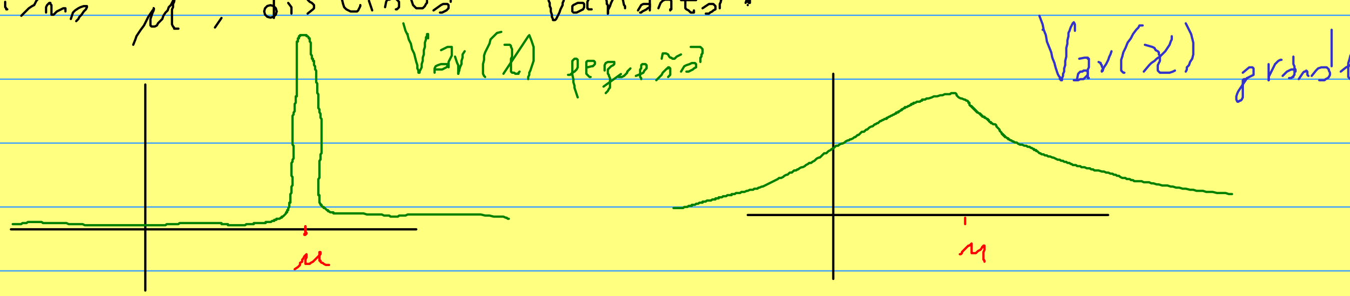
X variable aleatoria:

- $E(X)$ es una media
- $Var(X)$, $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



Misma μ, distinta varianza:



Calculamos $E(X)$ y $Var(X)$

$p_X(1) = 0{,}48$
$p_X(2) = 0{,}35$
$p_X(3) = 0{,}05$

$$E(X) = 0\,\cancel{p_X}(0) + 1\,p_X(1) + 2\,p_X(2) + 3\,p_X(3)$$

$$= 0{,}48 + 2(0{,}35) + 3(0{,}05)$$

$$= 0{,}48 + 0{,}70 + 0{,}15$$

$$= 1{,}33$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$= E(X^2) - E(X)^2$$

Obs: Si X es v.a. y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(X)$ es integrable (o convergente la serie) entonces:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in Rec(X)} g(x)\, p_X(x)$$

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

$p_X(1) = 0{,}48$
$p_X(2) = 0{,}35$
$p_X(3) = 0{,}05$

$$E(X^2) = 0^2\,\cancel{p_X}(0) + 1^2 p_X(1) + 2^2 p_X(2) + 3^2 p_X(3)$$

$$= 0{,}48 + 4\cdot(0{,}35) + 9\,(0{,}05)$$

$$= 0{,}48 + 1{,}40 + 0{,}45$$

$= 0,48 + 1,85$

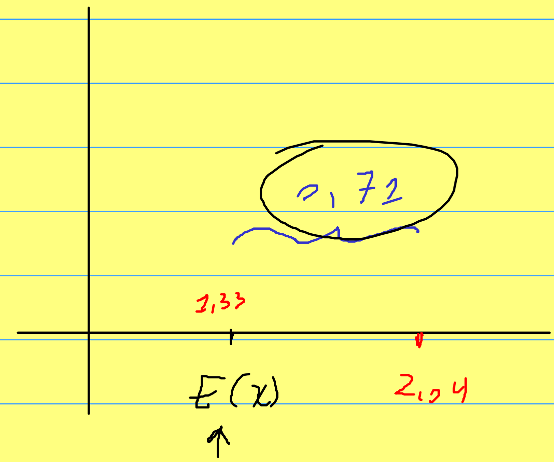
$= 2,33$

$Var(X) = 2,3300 - 1,7689 = 0,5611 \approx 0,56$

$E(X) = 1,33$

$Var(X) \simeq 0,56 \rightarrow \sigma = \sqrt{Var(X)} \simeq 0,75$

¿Tiene sentido que en una muestra de 2400 personas el promedio sea prom $= 2,04$?



$\text{prom} - E(X) = 0,71$

$\dfrac{Var(X)}{2400} \simeq \dfrac{0,56}{2400} = 0,0004$

Esperanza

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu$

X discreta $\Rightarrow E(X) = \sum_{k \in Rec(X)} k\, p_X(k)$

X continua $\Rightarrow E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$

• Propiedades:

- Es lineal : $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$
- X e Y son ind $\Rightarrow E(XY) = E(X)\,E(Y)$
- Si X es constante $\Rightarrow E(X) = a$
  $X = a$

Ejercicio 3

La función de densidad de la variable aleatoria X que mide los diámetros de paso de los hilos de la rosca de una pieza está dada por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi\,(1+x^2)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} & \end{cases}$

1. ¿Cuál es el valor esperado de X?
2. Si ahora definimos una variable aleatoria Y tal que $Y = 3X + 1$, ¿cuál es el valor esperado de Y?

1) $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$

$$= \int_0^1 \frac{4x}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^2 \frac{1}{u} \, du$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\ln(2) - \cancel{\ln(1)}^{\,0} \right)$$

$u = 1 + x^2$

$du = 2x\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{2\ln(2)}{\pi}}$$

ii) $Y = 3X + 1.$

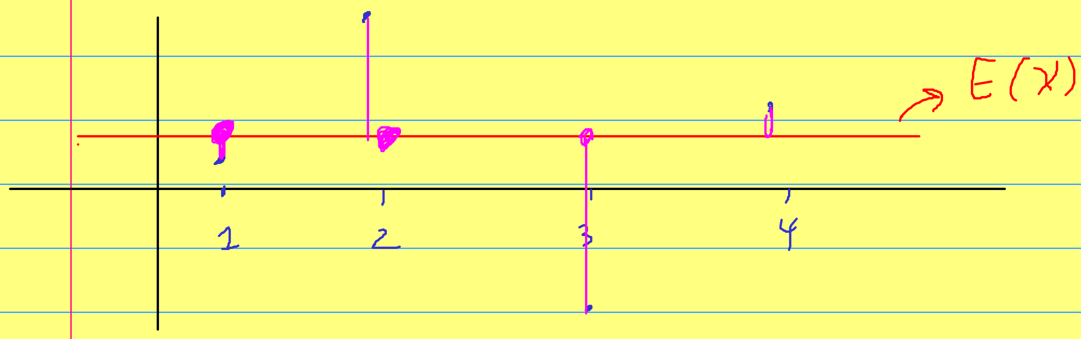
$$E(Y) = E(3X + 1) = 3\underbrace{E(X)}_{\frac{2\ln(2)}{\pi}} + \underbrace{E(1)}_{1}$$

$$= \frac{6\ln(2)}{\pi} + 1$$

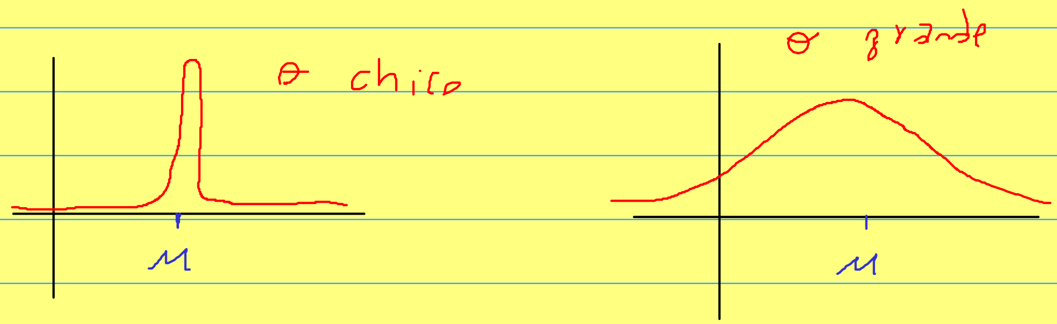
Varianza:

Más fácil

$$Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \boxed{E(X^2) - E(X)^2}$$



Def: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ $\Rightarrow$ Desviación estándar



Propiedades:

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(X) = 0 \Rightarrow \left(X - E(X)\right)^2 = 0$

$\Rightarrow X(\omega) = E(X) \Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}$ tal que $P(X = a) = 1$

- X e Y son independiente: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$\cdot \mathrm{Var}(X+a) = \mathrm{Var}(X)$

$\cdot \mathrm{Var}(bX) = b^2\, \mathrm{Var}(X)$ → La varianza NO es lineal.

Ejercicio 6
Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

1. $\mathcal{U}\{1,...,n\}$ (uniforme discreta)
2. $\mathcal{U}[a,b]$ (uniforme continua)
3. $\mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson)
4. $\exp(\lambda)$ (exponencial)
5. $\mathrm{Geo}(p)$ (geométrica)

1) $X \sim U\{1,...,n\}$ → $p_X(k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in \mathrm{Rec}(X)$

$$E(X) = \sum_{k \in \boxed{\mathrm{Rec}(X)}} k\, \boxed{p_X(k)}$$

→ $\mathrm{Rec}(X) = \{1, ..., n\}$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Suma de Gauss

$n=2$: $\quad 1 \quad \overset{3/2}{\downarrow} \quad 2$

$n=3$: $\quad 1 \quad \overset{E(X)}{\downarrow} 2 \quad 3$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k \in Rec(X)} k^2 \, p_X(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= (n+1)\left[\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{4n+2-3n-3}{12}\right]$$

$$= (n+1)\left[\frac{n-1}{12}\right]$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$