30/3

Def: Dados $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria definimos función de distribución acumulativa (fda) como:

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$F(a) = P(\{X \leq a\})$$

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$

Propiedades:

i) Es monótona creciente.

ii) Es continua por derecha: $\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

i) Si $a \leq b \Rightarrow \{X \leq a\} \subset \{X \leq b\}$

$$0 \leq P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = \underbrace{P(X \leq b)}_{F(b)} - \underbrace{P(X \leq a)}_{F(a)}$$

Si $a \leq b$: $0 \leq F(b) - F(a)$

$F(a) \text{ vs } F(b)$

Práctico 4

Ejercicio 2

Se consideran las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1.
$$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \frac{x}{1+x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

Hallar α y β para que F sea una función de distribución.

- $F(x)$ es continua por derecha, en particular si tomamos $a = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \underbrace{\lim_{x \to 0^+} F(x)}_{\frac{1}{4}} = \overbrace{F(0)}^{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \beta = \frac{1}{4}$$

- $$1 = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha \frac{x}{1+x}$$

$$= \alpha \boxed{\overbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x}}^{1}} = \alpha$$

$\beta = 1/4$ y $\alpha = 1$

• Si $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

• Continuidad de la probabilidad:

• $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_j P(A_j)$

• $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, $P\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_j P(A_j)$

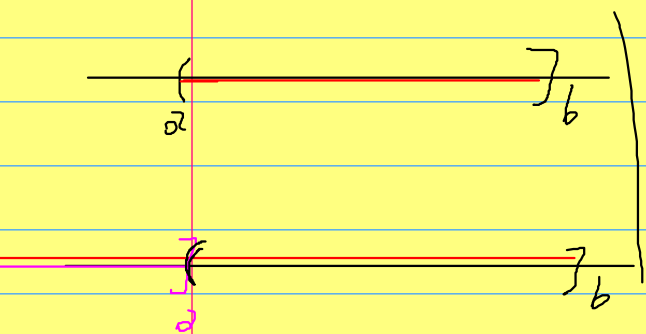
Ejercicio 3

Se considera la función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X. Probar que:

1. $\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

$$\{a < X \le b\} = \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \le b\}$$

$$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le b\} \setminus \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le a\}$$



$$= \{X \le b\} \setminus \{X \le a\}$$

Observar: Como $a \le b$, entonces

$$\{X \le a\} \subset \{X \le b\}$$

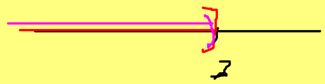
Entonces:

$$P(\{a < X \le b\}) = P(\{X \le b\} \setminus \{X \le a\})$$

$$= \underbrace{P(\{X \le b\})}_{F(b)} - \underbrace{P(\{X \le a\})}_{F(a)}$$

$$P(\{a < X \le b\}) = F(b) - F(a)$$

2. $\mathbf{P}(X=a) = F_X(a) - \lim_{x\to a^-} F_X(x)$ → Falta probar



$\{X = a\} = \{X \le a\} \setminus \{X < a\}$

$P(\{X=a\}) = P(\{X\le a\} \setminus \{X<a\})$

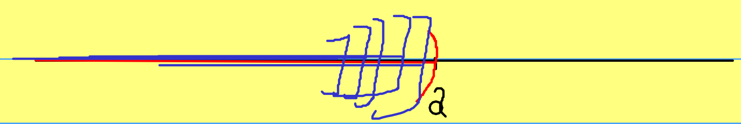
$= \underbrace{P(\{X\le a\})}_{F(a)} - P(\{X<a\})$

Probemos que $P(\{X<a\}) = \lim_{x\to a^-} F(x) = \lim_{x\to a^-} P(\{X\le x\})$

def.

Queremos probar $P(\{X<a\}) = \lim_{x\to a^-} P(\{X\le x\})$

Usaremos continuidad de la probabilidad.



$\{X<a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \le a - \frac{1}{n}\}$ → Probar

Sea $A_n = \{X \le a - \frac{1}{n}\}$. Veamos que es creciente.

$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1}$

Si $\omega\in A_n \Rightarrow X(\omega) \le a - \frac{1}{n} < a - \frac{1}{n+1}$

$X(\omega) < a - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \omega \in A_{n+1}$

Apliquemos continuidad de la probabilidad:

$$P(\{X < a\}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq a - \tfrac{1}{n}\}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} P\left(\{X \leq a - \tfrac{1}{n}\}\right) \qquad F\left(a - \tfrac{1}{n}\right)$$

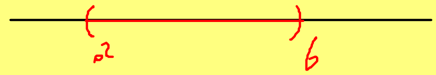
$$= \lim_{n \to +\infty} F\left(a - \tfrac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{x \to a^-} F(x)$$

Entonces $$\boxed{P(\{X < a\}) = \lim_{x \to a^-} F(x)}$$

$a < b$

4. $\mathbf{P}(a < X < b) = \underset{x \to b^-}{\text{lím}} F_X(x) - F_X(a)$



$\{a < X < b\} = \{X < b\} \setminus \{X \leq a\}$

$P(\{a < X < b\}) = P(\{X < b\}) - \underbrace{P(\{X \leq a\})}_{F(a)}$

Hay que ver que $P(\{X < b\}) = \lim_{x \to b^-} F(b)$

Ejercicio 4

Se considera una variable aleatoria X cuya función de distribución es:

1. $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 1/4 & \text{si } -3 \leqslant x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$$

Calcular:

$a = -3, \; b = 1$

a) $\mathbf{P}(-3 \leqslant X \leqslant 1)$ [redacted] $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

[redacted]

$$P(-3 \leq X \leq 1) = F_X(1) - \lim_{x \to -3^-} \overset{0}{F_X(x)}$$

$$= \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

$a = -1, \; b = 0$

f) $\mathbf{P}(-1 < X < 0)$ $\mathbf{P}(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$

$$P(-1 < X < 0) = \lim_{x \to 0^-} F_X(x) - F_X(-1)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Variables aleatorias discretas

Ejercicio 5 (Distribución binomial)
La distribución introducida en este ejercicio se denomina *distribución binomial*.

1. Se considera el natural $n \geq 1$, $0 < p < 1$ y el conjunto $A = \{0, 1, ..., n\}$. Probar que la función $p : A \to \mathbb{R}$ tal que $p(k) = C^n_k p^k (1-p)^{n-k}$ con $k \in A$ define una probabilidad en A.
   Sugerencia: utilizar el binomio de Newton.

$Rec(\mathcal{X})$

f

Recordar: $\mathcal{X} \sim Bin(n, p)$

La probabilidad de exito

La cantidad de veces que se repite el experimento

Ej: Tirar una moneda 50 veces: $p = 1/2$, $n = 50$

$$\mathcal{X}(\{\underbrace{C, C, C, C, \dots}_{45}, C, N, N, N, N, N\}) = 45$$

$$f : \{0, 1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\sum_{x \in Rec(\mathcal{X})} f(x) = 1 \rightsquigarrow \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1$$

Hay que probar.

Sugerencia: Binomio de Newton.