28/3

Ejercicio 8 (Examen, marzo de 2003)
Se admite que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5 % consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un análisis clínico: si el resultado de aplicar el análisis a las dos submuestras da positivo, el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado.

Considere los eventos:

$A_1 = \{$ el resultado de la primera submuestra es positivo $\}$

$A_2 = \{$ el resultado de la segunda submuestra es positivo $\}$

$B = \{$ el jugador es sancionado$\}$ → $A_1 \cap A_2$

$D = \{$ el jugador consumió anfetaminas $\}$

Se asume que los eventos A_1 y A_2 *condicionados* a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)P(A_2|D)$ y $P(A_1 \cap A_2|D^c) = P(A_1|D^c)P(A_2|D^c)$.

Se sabe además que $P(A_i|D) = 0{,}90$ y $P(A_i|D^c) = 0{,}02$ para $i = 1, 2$.

1. Calcule $P(D|A_1)$, esto es, la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.
2. Calcule $P(B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

M_1	M_2	Veredicto
N	N	No sanciona
N	P	No sanciona
P	N	No sanciona
→ P	P	Sanciona

$P(\underbrace{\{\text{"Un jugador consumió anfetaminas"}\}}_{D}) = 0{,}05$

$$P(A_1 \cap A_2 | D) = P(A_1|D)\,P(A_2|D)$$
$$P(A_1 \cap A_2 | D^c) = P(A_1|D^c)\,P(A_2|D^c)$$

$$P(A_1|D) = P(A_2|D) = 0{,}9$$
$$P(A_1|D^c) = P(A_2|D^c) = 0{,}02$$

1) $P(D|A_1) = \dfrac{P(D \cap A_1)}{P(A_1)} \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(A_1|D)\,P(D)}{P(A_1)}$ ✓

Conocemos todo salvo $P(A_1)$, entonces ¿Cómo calculamos $P(A_1)$?

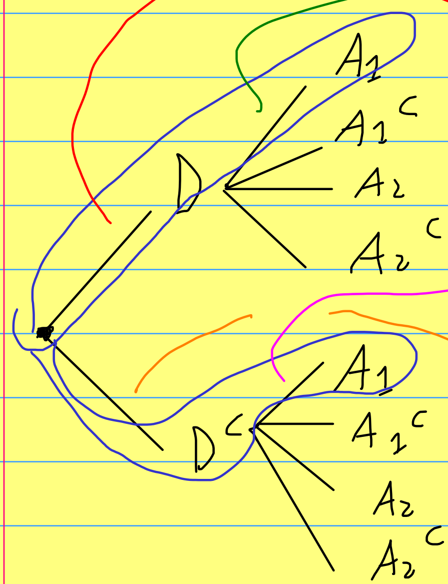
Obs: $\{D, D^c\}$ es una separación de Ω.

entonces, por probabilidad total:

$P(D^c) = 1 - P(D)$

letra

$$P(A_1) = P(A_1|D)\,P(D) + P(A_1|D^c)\,P(D^c)$$



$$\cdot\ P(D|A_1) = \frac{P(A_1|D)\,P(D)}{P(A_1)} = \frac{P(A_2|D)\,P(D)}{P(A_1|D)\,P(D) + P(A_2|D^c)\,P(D^c)}$$

2) $\overbrace{\{\text{"El jugador es sancionado"}\}}^{B}$

$=$

$\{\text{"La muestra 1 da positivo"}\}$ A_1

$\cap$

$\{\text{"La muestra 2 da positivo"}\}$ A_2

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2) = \underbrace{P(A_1 \cap A_2|D)}\,P(D) + \underbrace{P(A_1 \cap A_2|D^c)}\,P(D^c)$$

Prob. total

$$= \overbrace{P(A_1|D)\,P(A_2|D)}\,P(D) + \overbrace{P(A_1|D^c)\,P(A_2|D^c)}\,P(D^c)$$

Por letra

Obs: A_1 y A_2 son independientes si:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

· Hacerlo

3. Calcule $P(D|B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.

Bayes

$$P(D|B) = \frac{P(B|D)P(D)}{P(B)}$$

$$B = A_1 \cap A_2 \rightarrow P(B|D) = P(A_1 \cap A_2 | D)$$
$$= P(A_1|D)\,P(A_2|D)$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}9$$

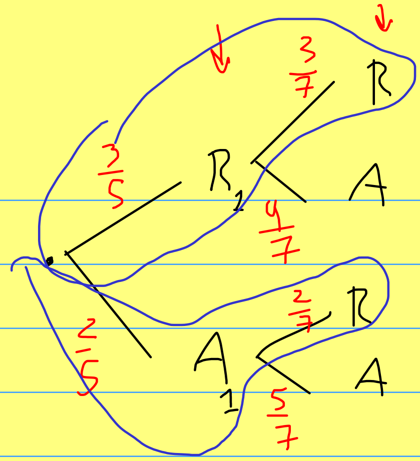
Ejercicio 9 (Examen, febrero 2004)
De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. **A continuación** se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?
3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

R R R
A A

R R
A A A A

1) $P = \frac{1}{7}$ → # favorable → # totales



$$P(C) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}$$

$$= \frac{9+4}{35} = \frac{13}{35}$$

B = {"Sale la misma bola"}
C = {"Sale roja en la segunda"}

3) $$P(B|C) = \frac{P(C|B)\,P(B)}{P(C)}$$

$$P(C|B)P(B) = P(C)\,P(B)$$

Práctico 4

Def: Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad, una variable aleatoria es una función

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Ej: El experimento es tirar un dado:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$X(\omega) = \sqrt{\omega}$$

Ej: El experimento es tirar dos dados:

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor a 10?

$$X(i, j) = i + j$$

Notación: $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

Def: Dada una variable aleatoria $\mathcal{X}$ en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, una distribución de probabilidad puntual es una función:

$$p : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

tal que $\boxed{p(x) := P(\{\mathcal{X} = x\})}$

$$\Omega \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathbb{R} \xrightarrow{p} [0, 1]$$

Ej: El experimento es tirar dos dados:

$\mathcal{X}(i,j) = i+j$

$p(1) = P(\{\mathcal{X} = 1\}) = P(i+j = 1) = 0$

$p(3) = P(\{\mathcal{X} = 3\}) = P(i+j = 3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Obs: • Si $x \notin Im(\mathcal{X}) \Rightarrow p(x) = 0$

• $\sum_{x \in Im(\mathcal{X})} p(x) = \sum_{x \in Im(\mathcal{X})} P(\{\mathcal{X} = x\}) = 1$