23/3

Probabilidad total:

$\underbrace{C_1, \ldots, C_n \text{ disjuntos 2 a 2 tal que } \Omega = \bigcup C_i}^{\text{Una partición de } \Omega}$

y $A \subset \mathcal{A}$ $\qquad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)$

Obs: Vale para infinitos numerables.

Teo (Bayes):

$$P(C_k|A) = \frac{P(A|C_k)\,P(C_k)}{P(A)}$$

Ejercicio 5

1. Se considera una caja que contiene $\overbrace{\text{6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules}}^{15}$. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva (sin reposición). Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul

$A_1 = \{$"la primera es roja"$\}$, $\quad P(A_1) = 6/15$

$A_2 = \{$"la segunda es blanca"$\}$, $\quad P(A_2) = 4/14$

$A_3 = \{$"la tercera es azul"$\}$, $\quad P(A_3) = 5/13$

$$P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) = P(A_1 \mid A_2 \cap A_3)\, P(A_2 \cap A_3)$$

$$= \underbrace{P(A_1 | A_2 \cap A_3)}_{\frac{6}{15}}\ \underbrace{P(A_2|A_3)}_{\frac{4}{14}}\ \underbrace{P(A_3)}_{\frac{5}{13}}$$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$

2. Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.

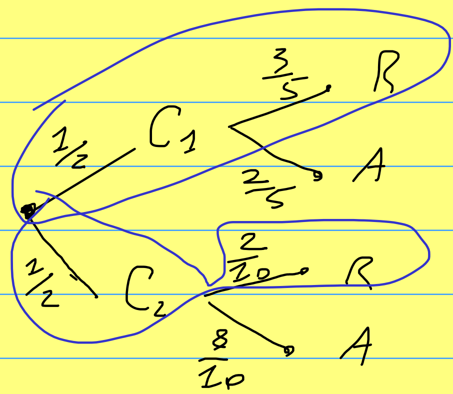
   a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.

C_1

R R R
A A

C_2

R R
A A A A A A A A



$$P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{10}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{10}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10} = \frac{4}{20} = \frac{2}{5}$$

B_1 = { "sale caja 1" }
B_2 = { "sale caja 2" }
A = { "sale rojo" }

P. Total: $P(A) = \overbrace{P(A|B_1)}^{3/5}\ \overbrace{P(B_1)}^{1/2} + \overbrace{P(A|B_2)}^{2/10}\ \overbrace{P(B_2)}^{1/2}$

   b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?

$$P(C_1|R) = \frac{\overset{3/5}{P(R|C_1)}\cdot \overset{1/2}{P(C_1)}}{\underset{2/5}{P(R)}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{3}{4}$$

Si $P(A), P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

Obs: $P(\cdot \mid R)$ es una función de probabilidad

Como $C_1 \cup C_2 = \Omega \Rightarrow P(C_1 \cup C_2 \mid R) = P(\Omega \mid R) = 1$

Como $C_1 \cap C_2 = \phi \Rightarrow P(C_1 \cup C_2 \mid R) = P(C_1 \mid R) + P(C_2 \mid R)$

$$1 = \underbrace{P(C_1 \mid R)}_{\frac{3}{4}} + P(C_2 \mid R)$$

6. 1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

   b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

$A_i = \{$ "El jugador i acerto" $\}$ $\quad i = 1, 2, 3$

$B = \{$ "Solamente uno acerto" $\}$

$$B = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

Por que los 3 sucesos son disjunto

los A_i son idependiete.

- $P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \overset{\supset}{=} P(A_1)\, P(A_2^c)\, P(A_3^c)$

$$\boxed{P(B) = P(A_1)\,P(A_2^c)\,P(A_3^c) + P(A_1^c)\,P(A_2)\,P(A_3^c) + P(A_1^c)\,P(A_2^c)\,P(A_3)}$$

$b)$ Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

A_i = { "El jugador i acertó" } $i = 1, 2, 3$

B = { "Solamente uno acertó" }

a) $P(B)$

b) $P(A_1 | B) = \dfrac{P(B | A_1)\, P(A_1)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1) P(A_2^c) P(A_3^c) P(A_1)}{P(B)}$

$P(B | A_1) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1) P(A_2^c) P(A_3^c)$

$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

Ejercicio 7

Este ejercicio consiste en demostrar y aplicar una *generalización de la Fórmula de Bayes.*

1. Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω (es decir $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ incompatibles y $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$) y sea A otro suceso cualquiera, probar que

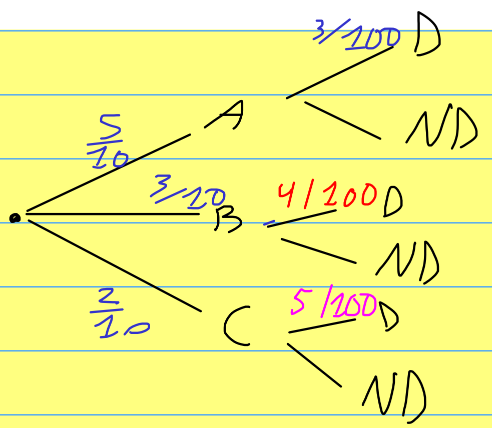
$$\mathbf{P}(B_j|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_j)\,\mathbf{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\,\mathbf{P}(B_i)}$$

para todo $j = 1,\ \ldots, n$.

- $P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{P(A)}$ → Bayes

- Prob. total: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)$

2. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de producción de defectuosos de cada máquina son 3 %, 4 % y 5 % respectivamente. Se toma al azar un artículo de la producción total. Si el artículo seleccionado es defectuoso, hallar la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.



$P(E_c\,|\,F)$

$E_i = \{$"Proviene de la máquina i"$\}$, $i = A, B, C$

$F = \{$"El producto es defectuoso"$\}$

✓ Hay que verificar que E_A, E_B y E_C es una partición de Ω.

$$P(E_c|F) = \frac{\overset{5/100}{P(F|E_c)}\ \overset{2/10}{P(E_c)}}{P(F|E_A)P(E_A) + P(F|E_B)P(E_B) + P(F|E_c)P(E_c)}$$

$3/200 \cdot \frac{5}{20}$ $\quad$ $4/200 \cdot 3/20$ $\quad$ $\frac{5}{100} \cdot \frac{2}{20}$

$$P(E_c \mid F) \; \frac{\dfrac{10}{2000}}{\dfrac{15}{1000} + \dfrac{12}{1000} + \dfrac{10}{2000}} = \frac{10}{37}$$