21/3

6. * Un secretario o secretaria coloca aleatoriamente n cartas diferentes en sobres. En cada uno de los sobres está escrito el nombre del destinatario en cada una de las n cartas, de modo que lo único que debe hacer es acertar cada carta en el sobre que le corresponde.

(a) Calcular la probabilidad p_n de que al menos una carta vaya a parar al sobre que le toca.

(b) Calcular $\lim_n p_n$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\le i\le n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \overset{\sim}{\ldots} + (-1)^{n-1}\,\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

"Al menos una carta va a parar al sobre que le toca" es lo mismo que
A_2 → Unión A_z

"Acertar la carta 1 y/o acertar la carta 2 y/o y/o.... y/o acertar la carta n"
A_n

$A_i = \{$ "acerta la carta i" $\}$

$P(\text{"Acertar al menos una"}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

Casos favorables

• $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$ → Casos posibles.

• $P(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{(n-1)}$

• $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{(n-1)} \cdot \dfrac{1}{(n-2)}$

⋮

• $P\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{i_r}\right) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{(n-1)} \cdots \dfrac{1}{(n-(r-1))}$

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\le i\le n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{P}(A_i\cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i\cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \quad \frac{1}{n!}$$

$\frac{1}{n}\cdot n = 1$ $\qquad \binom{n}{2} \qquad \binom{n}{3}$

$$= \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{n} - \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} + \sum_{1\le i<j<k\le n} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-2}$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$\frac{1}{3!}$

$$= 1 - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)} + \frac{n!}{3!\,(n-3)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-2)}\cdot\frac{1}{(n-2)} -$$

$1 \qquad n! \qquad n!$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\frac{1}{j!}$$

b) $$\lim_{n} p_n = \lim_{n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1}\frac{1}{j!}$$

$$= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!}$$

Práctico 3

Probabilidad condicional:

Sirve para calcular la probabilidad de que pase A sabiendo que pasa B.

Ej: Sacar un número entre 0 y 9

$$P(\text{"salga 2"}) = \frac{1 \rightarrow \#\text{ favorables}}{10 \rightarrow \#\text{ totales}}$$

$$P(\text{"salga 2 sabiendo que salió par"}) = \frac{1 \rightarrow \#\text{ favorables}}{5 \rightarrow \#\text{ totales}}$$

$A, B \in \mathcal{A}$

→ A sabiendo que pasa B

- $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\boxed{\text{si } P(B) > 0}$

- Si $P(B) = 0 \rightarrow P(A \mid B) = 0$

- Fijado $B \in \mathcal{A}$, la función

$$P(\bullet \mid B) : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$$

es una función de probabilidad en Ω, es decir:

→ • $P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B)$ si $A \cap B = \emptyset$

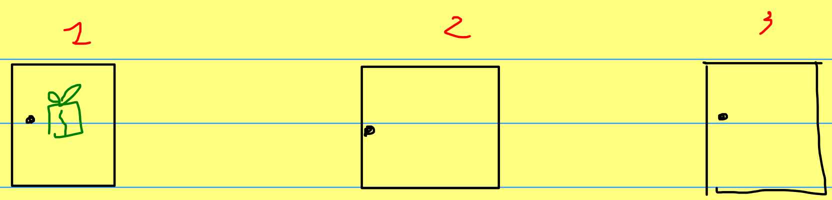
→ • $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

Eventos independientes:

A y B son eventos independientes si
$P(A|B) = P(A)$ (y además $P(B|A) = P(B)$)
dicho de otra forma:
Si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

• El juego de Monty Hall:



- Elijo 1
- Locutor abre una puerta vacía y nos pregunta si queremos mantener o preferimos cambiar la puerta.

$P(\text{acertar}) = \frac{1}{3}$ | $P(\text{No acertar}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(\text{acertar} \mid \text{sabiendo una de las cuales está vacía}) =$
$= \frac{1}{2}$

Solo quedan dos puertas

Ejercicio 1
Se consideran los sucesos A y B tales que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calcular $\mathbf{P}(B)$ en los siguientes casos:

1. Si A y B son independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
2. Si A y B son disjuntos (o ~~x~~cluyentes) $\rightarrow P(A \cap B) = 0$
3. Si A es un subconjunto de B $\rightarrow A \subset B$

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$, $P(B) = ??$

PIE: $P(A \cup B) = P(A) + \boxed{P(B)} - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$= P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

6. 1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

   b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

¿Qué pasa con $P(A|B)$ si $B \subset A$?

- Tirar un dado

$A = \{$"sale par"$\}$ $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$ $\Big\}$ $B \subset A$.

$B = \{$"sale 2"$\}$ $\Rightarrow B = \{2\}$

$$P(A/B) = 1$$

En general: Si $B \subset A \Rightarrow P(A/B) = 1$

Ejercicio 4

Se consideran los eventos A y B tales ~~que~~

1. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular

   a) $\mathbf{P}(A|B)$

   b) $\mathbf{P}(B|A)$

   c) $\mathbf{P}(A^C|B)$

   d) $\mathbf{P}(B^C|A)$

   e) $\mathbf{P}(A^C|B^C)$

   f) $\mathbf{P}(B^C|A^C)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ (PIE)

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$

$(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$

c) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

de Morgan

e) $P(A^c|B^c) = \dfrac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P((A \cup B)^c)}{P(B^c)}$

$$= \frac{1 - P(A \cup B)}{P(B^c)}$$