$A = \{ I, III$ y IV abiertas $\}$

14/3

12. Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$\mathbb{P}$ (I abierta) $= \mathbb{P}$ (II abierta) $= \mathbb{P}$ (IV abierta) $= 0,55$,
$\mathbb{P}$ (III abierta) $= 0,36$,
$\mathbb{P}$ (I cerrada, II abierta) $= \mathbb{P}$ (I abierta, IV cerrada) $= \mathbb{P}$ (I cerrada, III abierta) $= 0,2$.

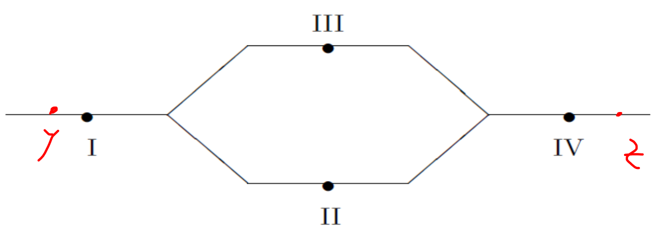
$P(I \cap II) = P(I \cup IV) - P(I) - P(III)$

P(I abierta II cerrada) $= 1 - 0,2 = 0,8$

$\mathbb{P}$ (II abierta, IV abierta) $= 0,35$,
$\mathbb{P}$ (III abierta, IV cerrada) $= 0,26$.
$\mathbb{P}$ (II abierta, III abierta) $= 0$
$\mathbb{P}$ (I o II o IV abierta) $= 0,85$,
$\mathbb{P}$ (I o III o IV abierta) $= 0,87$.

$\{ II$ o $III\ c \} = \{ II\ a, IV\ a \}$ o $\{ I\ a, III\ c \}$

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.



Abierta	Cerrada	
1) I, III, IV	II	Por lo menos una
2) I, II, IV	III	
3) I, II, III, IV	→	Las dos abiertas

Sean $A = \{$"Las compuertas I, III y IV están abiertas"$\}$
$B = \{$" " " I, II y IV " " "$\}$
$C = \{$"Todas están abiertas"$\}$

$P(\text{"}A \text{ o } B \text{ o } C\text{"}) = P(A \cup B \cup C)$

I o III o IV   I   III   IV

11) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\underbrace{A \cap B}_{\phi}) - \mathbb{P}(\underbrace{A \cap C}_{\phi}) - \mathbb{P}(\underbrace{B \cap C}_{\phi}) + \boxed{\mathbb{P}(\underbrace{A \cap B \cap C}_{\phi})}$

$P(A) = P(I \cap III \cap IV)$

Usando esto: $P(I \cap III \cap IV) = P(I \cup III \cup IV) - P(I) - P(III) - P(IV) + P(I \cap III) + P(I \cap IV)$

$+ P(\mathrm{III} \cap \mathrm{IV})$

$\boxed{\{\mathrm{I} \circ \mathrm{III}\}} = \{\mathrm{I} \circ \mathrm{III} \circ \mathrm{IV}\} \setminus \{\mathrm{IV}\}$

$P(\{\mathrm{I} \circ \mathrm{III} \circ \mathrm{IV}\} \setminus \{\mathrm{IV}\}) = P(\{\mathrm{I} \circ \mathrm{III} \circ \mathrm{IV}\}) - P(\underbrace{\{\mathrm{I} \circ \mathrm{III} \circ \mathrm{IV}\} \cap \{\mathrm{IV}\}})$

$\boxed{P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)}$ $\qquad \{\mathrm{IV}\} \cup \{\mathrm{I} \circ \mathrm{III}\}$

$A = \{\mathrm{I}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}$
$B = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV}\}$
$C = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}$

$P(A \cup B \cup C)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \overset{0}{P(A \cap B)} - \overset{0}{P(A \cap C)} - \overset{0}{P(B \cap C)}$
$+ \underset{0}{P(A \cap B \cap C)}$

$A \cap B = \phi, \quad A \cap C = \phi, \quad B \cap C = \phi, \quad A \cap B \cap C = \phi$

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + \underset{0}{P(C)}}$$

$P(C) = P(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV})$

Como evento $\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\} \subset \{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}$
por lo tanto

$0 \leq P(\{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}\}) \leq P(\{\mathrm{II}, \mathrm{III}\}) = 0$

por hipótesis

Entonces $P(C) = 0$.

$P(B) = P(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{IV})$

$\{I_a, II_a, IV_a, III_c\} = \{II_a, IV_a, I_c, III_c\}$

$\cup \{I_a, III_c\}$

$0{,}35$ $\quad$ F $\quad$ $0{,}8 = 1 - 0{,}2$

$P(\{II_a, III_c\}) = P(\{II_a, IV_a\}) + P(\{I_a, III_c\})$

$- P(\{II_a, III_a\})$ $\quad \to 0$

13. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad.

(a) Mostrar que si A y B son sucesos entonces:

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$$P(A \cup B) \overset{PIE}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\leq P(A) + P(B)$

$$\boxed{P(A \cap B) \geq 0} \to P : \mathcal{A} \to [0,1]$$

$$P(A \cup B) + \overbrace{P(A \cap B)}^{\geq 0} = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

(b) * Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(A_n)$$

Inducción:

Caso base: $m = 2 \Rightarrow$ Es la parte a

Caso inductivo: Supongamos que $P\left(\bigcup_{n=1}^{h} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{h} P(A_n)$

Queremos probar que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{h+1} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{h+1} P(A_n)$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{h+1} A_n\right) = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{h} A_n\right) \cup A_{h+1}\right)$$

Caso base $m=2$

$$\le P\left(\bigcup_{n=1}^{h} A_n\right) + P(A_{h+1})$$

Hipótesis inductiva

$$\le \sum_{n=1}^{h} P(A_n) + P(A_{h+1}) = \sum_{n=1}^{h+1} P(A_n)$$

· $$\sum_{n=1}^{h} P(A_n) + P(A_{h+1}) \ge P\left(\bigcup_{n=1}^{h} A_n\right) + P(A_{h+1})$$

Caso base

$$\ge P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{h} A_n\right) \cup A_{h+1}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{h+1} A_n\right)$$

(c) ** Demostrar que si $\{A_n\}_{n\in N}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

- Continuidad de la probabilidad: $A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($A_n \subset A_{n+1}$)

entonces $\lim_n P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

$\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos, queremos ver que

$$\lim_n P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

$$B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j, \quad B_n \subset B_{n+1}$$

$$B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\lim_n P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_n P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

¿Por qué son iguales?

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$