15/6

Ejercicio 1

La siguiente tabla registra los niveles de cloro en sangre de una muestra de 10 pacientes de una clínica, medido en milimoles por litro.

101,99	106,64	103,36	109,54	103,99
107,32	106,55	103,7	100,57	105,85

1. Asumiendo que los datos tienen distribución normal con media μ y desvío $\sigma = 2,5$, implemente la siguiente prueba de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 104 \text{ mg/dl} \\ H_1: & \mu > 104 \text{ mg/dl.} \end{cases}$$

Nota: Trabaje al nivel $\alpha = 0,05$

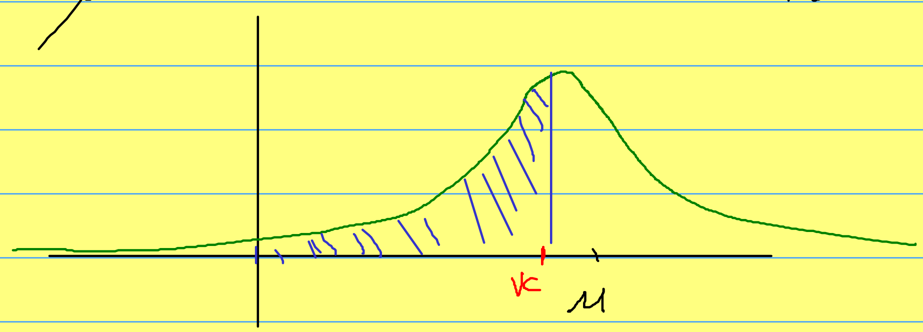
2. Sabiendo que el verdadero valor de μ es 106 mg/dl, calcular la potencia de la prueba.

$$RC = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{10} : \overline{X}_n > 104,15 + 1,25\}$$

- $\beta = P_{H_1}(\underbrace{(X_1, \dots, X_n) \notin RC}_{})$

No rechazo Ho, entonces H1 pero H1 es cierto.

Si $\mu = 106 \Rightarrow RC$ no cambia



$\beta = P_{H_2}((x_1, \ldots, x_n) \notin RC) = P_{H_2}(\bar{X}_n \leq 106,2)$

$\mu = 106$

estandarizar

$\sigma = 2,5$

$n = 10$

$N(0,1)$

$$= P_{H_2}\left(\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma}\sqrt{n} \leq \left(\frac{106,2 - 106}{2,5}\right)\sqrt{10}\right)$$

$$= P_{H_2}\left(Z \leq \frac{0,2}{2,5} \cdot \sqrt{10}\right)$$

Ver en la tabla normal

La potencia es $K = 1 - \beta$.

Ejercicio 2

Se dispone de la siguiente muestra

7.24	1.91	1.58	3.81	5.36	2.37
1.86	1.63	3.26	1.91	3.96	1.54

1. Asumiendo que los datos tienen distribución normal con media μ y desvío $\sigma = 2$, implemente la siguiente prueba de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 4 \\ H_1: & \mu < 4 \end{cases}$$

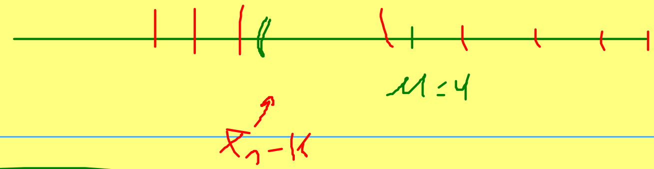
Nota: Trabaje al nivel $\alpha = 0,05$

2. Sabiendo que el verdadero valor de μ es 3, calcular la potencia de la prueba.

. Sabemos que $\bar{X}_n \xrightarrow{c.s.} \mu$,

$[\bar{X}_n - K, \bar{X}_n + K]$

$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$



$\alpha \to P_{H_0}\left((x_1, \dots, x_n) \in RC\right) = \alpha$

$$P_{H_0}\left(\bar{X}_n \leq 4 - K\right) = \boxed{0{,}05}$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$P_{H_0}\left(\left(\frac{\bar{X}_n - 4}{2}\right)\sqrt{12} \leq \left(\frac{4 - K - 4}{2}\right)\sqrt{12}\right) = 0{,}05$$

$$\underbrace{P_{H_0}\left(Z \leq -K \cdot \frac{\sqrt{12}}{2}\right)}_{\Phi\left(-K \frac{\sqrt{12}}{2}\right)} = 0{,}05$$

$$\boxed{K = -\Phi^{-1}(0{,}05) \cdot \frac{2}{\sqrt{12}}}$$

$$K = -(-1{,}645)\frac{2}{\sqrt{12}} = (1{,}645)\frac{2}{\sqrt{12}} = 0{,}949$$

$$RC = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \bar{X}_n \leq \underbrace{4 - 0{,}949}_{3{,}051}\right\}$$

$z_\alpha = 1,645$

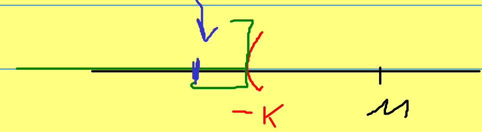
z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026

7.24	1.91	1.58	3.81	5.36	2.37
1.86	1.63	3.26	1.91	3.96	1.54

} Calcular promedio.

$\overline{X}_n = 3,0408 \in RC$

Entonces rechazo H_0



$\mu = 3$
$\sigma = 2$
$n = 12$

$\beta = P_{H_1}((x_1, \dots, x_n) \notin RC)$

$= P_{H_1}(\overline{X}_n > 4 - 0,949)$

Estandarizar

$$= P_{H1}\left(\frac{(\bar{X}_n - 3)}{2}\sqrt{22} > \left(\frac{\overset{3{,}651}{4 - 0{,}349 - 3}}{2}\right)\sqrt{22} \right)$$

$$= P_{H1}\left(Z > \frac{0{,}51}{2} \cdot \sqrt{22} \right)$$

$$= P_{H1}(Z > 0{,}088) = 0{,}4641$$

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170

Potencia:

$$1 - \beta = 1 - 0{,}4641$$
$$= 0{,}5359$$

Ejercicio 4

Se consideran 16 mediciones de una cierta concentración. Puede suponerse que las mediciones $X_1, \ldots, X_{16}$ siguen el modelo: $X_i = \mu + e_i$, donde $e_1, \ldots, e_{16}$ $iid \sim N(0, \sigma^2)$.

1. Si la muestra es:

$n = 16$
$\alpha = 0{,}05$

0.50	0.38	0.61	0.44	0.53	0.42	0.43	0.47
0.58	0.36	0.55	0.51	0.57	0.59	0.46	0.48

$\overline{X}_n = 0{,}4925$

Hallar un intervalo de confianza 95 % para μ.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[\overbrace{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}^{3{,}9668} - n\overline{X}_n^2\right]$$

H
0,00572667

Queremos μ sin conocer σ ⇒ t-Student.

$$\left[\overline{X}_n - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S_n}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}_n + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right]$$

$S_n \simeq 0{,}075$
$\sqrt{16} = 4$
$\overline{X}_n = 0{,}492$
$t_{0{,}025}(15) = 2{,}131$

$$0{,}492 - \overbrace{2{,}131 \cdot \frac{0{,}075}{4}}^{0{,}039}$$

$[0{,}453;\ 0{,}531]$

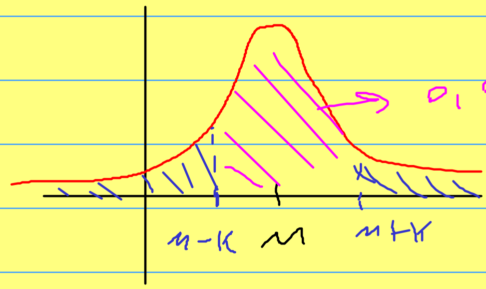
				$P(T \le t)$			
	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.01}(r)$	$t_{0.005}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878

$[0,453;\ 0,531]$

2. Se quiere probar la hipótesis de que $\mu = 0{,}50$. ¿Cuál es su decisión para $\alpha = 0{,}05$?

1º) $\begin{cases} H_0: & \mu = 0{,}5 \\ H_1: & \mu \neq 0{,}5 \end{cases}$

2º) $P_{H_0}\left(|\bar{X}_n| > 0{,}5 + K \right) = \overset{\alpha}{0{,}05}$



$$P\left(-0{,}5 - K \leq \bar{X}_n \leq 0{,}5 + K \right) = 0{,}95$$

$$P\left(\frac{(-0{,}5 - K + 0{,}5)\sqrt{16}}{S_n} \leq \frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{S_n} \leq \frac{(0{,}5 + K - 0{,}5)\sqrt{16}}{S_n} \right) = 0{,}95$$

$$P\left(\left(\frac{-K}{S_n}\right)4 \leq T_{n-1} \leq \frac{K}{S_n}4 \right) = 0{,}95$$

$$T\left(\frac{4K}{S_n}\right) - T\left(\frac{-4K}{S_n}\right) = 0{,}95$$

$$2\,T\left(\frac{4K}{S_n}\right) - 1 = 0{,}95$$

$$T\left(\frac{411}{5n}\right) = \frac{(2, 95)}{2}$$

$$k = T^{-1}\left(- \frac{(2, 95)}{2} \right) \cdot \frac{S_n}{4}$$