13/6

Intervalos de confianza para μ

→ Conociendo σ^2
tabla Normal
$[\bar{X}_n - K, \bar{X}_n + K]$

→ Sin conocer la varianza
tabla t-Student

$[\bar{X}_n - KS_n, \bar{X}_n + KS_n]$

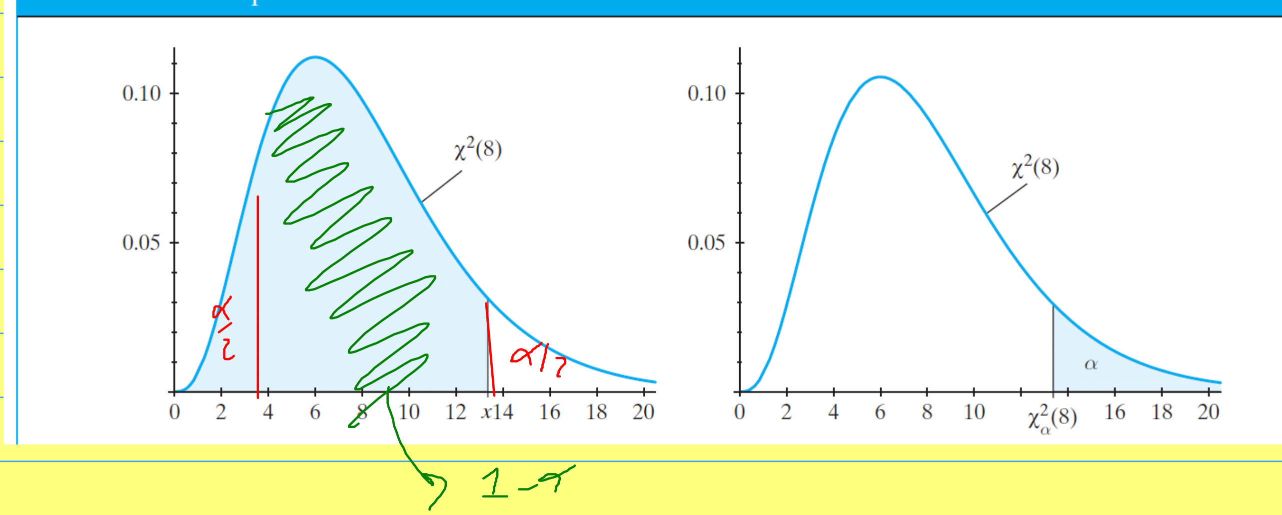
Intervalos de confianza para σ^2 → tabla Chi (χ^2)

<u>Teo</u>: $X_1, \dots, X_n$ MAS de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$$

con $n-1$ grados de libertad.

Table IV The Chi-Square Distribution



$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2} \leq \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza: $\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$

Ejercicio 9

Los siguientes son los pesos, en decagramos, de 10 paquetes de semillas de pasto distribuidos por determinada compañía: 46,4, 46,1, 45,8, 47,0, 46,1, 45,9, 45,8, 46,9, 45,2 y 46,0. Encontrar un intervalo de confianza 0,95 para la varianza de todos los paquetes de semillas de pasto que distribuyó esta companía, suponiendo una población normal.

$X_1, \dots, X_{10} \sim N(\mu, \sigma^2)$

$n = 10$

$\alpha = 0{,}05$

2,576

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\boxed{\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\overline{X}_n^2}\right).$$

46,4, 46,1, 45,8, 47,0, 46,1, 45,9, 45,8, 46,9, 45,2 y 46,0

93 92

$\overline{X}_n = 46{,}12$

$$\sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 2127312$$

$$\boxed{S_n^2 = \frac{2,576}{9} = 0,286}$$

$\alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

Encontrar $\chi^2_{0,975}$ y $\chi^2_{0,025}$

	$P(X \leq x)$							
	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990
r	$\chi^2_{0.99}(r)$	$\chi^2_{0.975}(r)$	$\chi^2_{0.95}(r)$	$\chi^2_{0.90}(r)$	$\chi^2_{0.10}(r)$	$\chi^2_{0.05}(r)$	$\chi^2_{0.025}(r)$	$\chi^2_{0.01}(r)$
1	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.34
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.54	20.09
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.99	18.31	20.48	23.21

$$\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right] = \left[\frac{9\cdot(0,286)}{19,02}, \frac{9\cdot(0,286)}{2,7}\right]$$

$$= \left[0,135 \,;\, 0,953\right]$$

Ejercicio 10
Un fabricante de baterías para automóvil asegura que sus baterías duran, en promedio, 3 años con una varianza de un año. Si 5 de estas baterías tienen duraciones de 1,9, 2,4, 3,0, 3,5 y 4,2 años, determine un intervalo de confianza 0,95 para σ^2 e indique si es válida la afirmación del fabricante de que $\sigma^2 = 1$. Se supone que la población de las duraciones de las baterías se distribuye aproximadamente en forma normal.

$$\left[\frac{(n-1) S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} , \frac{(n-1) S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

$n = 5$

$\alpha = 0{,}05$

1,9, 2,4, 3,0, 3,5 y 4,2

$\overline{X}_n = 3$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \left[\underbrace{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}_{48{,}26} - \underbrace{n \overline{X}_n^2}_{5(3)^2} \right]$$

$$= \frac{3{,}26}{4} = 0{,}815$$

	$P(X \le x)$							
	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990
r	$\chi^2_{0.99}(r)$	$\chi^2_{0.975}(r)$	$\chi^2_{0.95}(r)$	$\chi^2_{0.90}(r)$	$\chi^2_{0.10}(r)$	$\chi^2_{0.05}(r)$	$\chi^2_{0.025}(r)$	$\chi^2_{0.01}(r)$
1	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.34
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.14	13.28
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.07	12.83	15.09
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.36	15.51	17.54	20.09
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.68	16.92	19.02	21.67

$$\left[\frac{4 \cdot (0{,}815)}{11{,}14} ; \frac{4 \, (0{,}815)}{0{,}484} \right] = [0{,}292; \; 6{,}735]$$

Ejercicio 11

1. Al probar 100 barras de acero que fabricó la compañía A se encuentra que 12 no cumplieron con las especificaciones.

   a) Determinar un intervalo de confianza $\overset{\alpha}{\overline{95}}$ % para la proporción verdadera de las barras de acero que no cumplen las especificaciones.

   b) Si se desea estimar la proporción verdadera que no cumple con las especificaciones con una exactitud de 0,05 y una confianza de 0,95. ¿Cuántas barras se deben examinar?

Sea $X_j \sim Ber(p)$:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si no cumple} \\ 0 & \text{si cumple} \end{cases}$$

$\sum_{j=1}^{n} X_j$ cuenta la cantidad de barras que no cumplen las especificaciones.

$\overline{X}_n \to$ estima p.

$$\overline{X}_n \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$$P(p \in [\overline{X}_n - K, \overline{X}_n + K]) = 0,95$$

Queremos

$$P(\overline{X}_n - K \leq p \leq \overline{X}_n + K)$$

$$\shortparallel$$

$$P(-K \leq p - \overline{X}_n \leq K)$$

$$\shortparallel$$

$$P(-K - p \leq -\overline{X}_n \leq K - p)$$

$$\| $$

$$P\left(p - K \leq \overline{X}_n \leq p + K\right) \qquad \overline{X}_n \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

$\| \to$ Estandarizando $\to N(0,1)$

$$P\left(\frac{\cancel{p} - K - \cancel{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \leq Z \leq \frac{\cancel{p} + K - \cancel{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)$$

$$\|$$

$$P\left(\frac{-K\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{K\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$\|$$

$$\Phi\left(\frac{K\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-K\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

$$\|$$

$$2\,\Phi\left(\frac{K\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \qquad \underbrace{=}_{\text{Queremos}} \quad 1 - \alpha$$

$$\Phi\left(\frac{K\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$K = \Phi^{-1}\left(\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}_n$ estima p.

En nuestro caso: $\overline{X}_n = \frac{12}{100}$

$$K = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}}$$

El intervalo es $[\overline{X}_n - K, \overline{X}_n + K]$

b) Si se desea estimar la proporción verdadera que no cumple con las especificaciones con una exactitud de 0,05 y una confianza de 0,95. ¿Cuántas barras se deben examinar?

$$P(|\overline{X}_n - p| \leq 0{,}05) = 0{,}95$$