9/3

4. Una caja fuerte se abre mediante una cierta clave de 5 dígitos (pueden ser repetidos). Ud. es lo suficientemente audaz como para intentar abrirla, y lo hace probando números al azar. ¿Cuántas claves posibles hay? ¿Cuántas claves posibles hay si se usan sólo los dígitos de 1 a 6 en vez de usar los 10?

$D_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 \dots, \quad 10^5$

$D_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad 6^5$

7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Sean A, B y C sucesos. Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

(a) Ocurren A y B.

(b) Ocurren los tres sucesos.

(c) Ocurre A u ocurre B.

(d) Ocurre por lo menos uno de los tres sucesos.

(e) Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente.

(f) No ocurre B.

(g) No ocurre ni A ni B.

(h) No ocurre ninguno de los tres sucesos.

(i) Ocurre A y no ocurre B.

(j) Ocurre exactamente uno de los tres sucesos.

(k) Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

a) A y B $\rightsquigarrow A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$

b) A y B y C $\rightsquigarrow A \cap B \cap C$

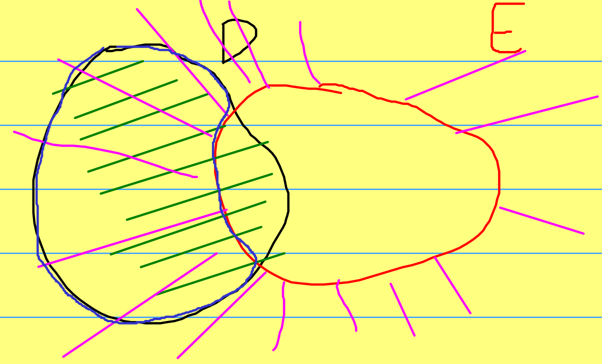
c) A o B $\rightsquigarrow A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$

d) A o B o C $\rightsquigarrow A \cup B \cup C$

e) A o B pero no A y B $\rightsquigarrow A \cup B \setminus (A \cap B) = A \cup B \cap (A \cap B)^c$

↪ no $D = \{x : x \notin D\} = D^c$

. $D \setminus E = D \cap E^c$



f) No B ⇝ B^c

j) Ocurre exactamente uno de los tres

pasa A y B

A, No B, No C ⇝ $A \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))$

no $\quad \parallel \quad$ pasa A y C

o $\quad A \cap (A \cap B \cup A \cap C)^c$

No A, B, No C ⇝ $B \setminus (B \cap A \cup B \cap C)$

o

No A, No B, C ⇝ $C \setminus (C \cap A \cup C \cap B)$

. $A \setminus (A \cap B \cup A \cap C) \cup B \setminus (B \cap A \cup B \cap C) \cup C \setminus (C \cap A \cup C \cap B)$

pasa A o B o C $\quad$ pasa A y C a la vez

. $A \cup B \cup C \setminus (A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C \cup A \cap B \cap C)$

pasa B y C a la vez

pasa A y B a la vez

pasan todos a la vez

8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

(a) Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces:

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$$

Sugerencia. Considerar que $B \setminus A = B \cap A^c$ y $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$
Deducir que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(b) Si A y B son sucesos entonces $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$ y $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$

a) $B \setminus A = B \cap A^c$
$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

• Si $\underbrace{C \cap D = \phi}_{\text{sucesos incompatibles}} \Rightarrow P(C \cup D) = P(C) + P(D)$

$P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) =$

$= P([B \cap A \cup B \cap A^c] \cap A^c)$

$= P((B \cap A) \cap A^c \cup (B \cap A^c) \cap A^c)$ → Distributiva de conjuntos

$= P(B \cap \underbrace{(A \cap A^c)}_{\phi} \cup B \cap \underbrace{(A^c \cap A^c)}_{A^c})$ → Asociativa

$= P(B \cap A^c)$

$B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

OBS: Como $A \cap A^c = \phi$, $B \cap A \subset A$, $B \cap A^c \subset A^c$ $\}$ $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \phi$
sucesos incompatibles

$P(B) = \underbrace{P(B \cap A)}_{P(A) \text{ por que } A \subset B \Rightarrow A \cap B = A} + P(B \cap A^c)$

$$P(B) = P(A) + P(\overset{B|A}{B \cap A^c})$$

$$P(B) = P(A) + P(B|A) \Rightarrow P(B) - P(A) = P(B|A)$$

siempre y cuando $A \subset B$

Si $A \not\subset B \Rightarrow P(B|A) = P(B) - P(A \cap B)$

b) A y B sucesos: $P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$

Principio de exclusión - inclusión: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$$

Hay que probar

• Supongamos $P(A) \geq P(B)$:

$$P(A \cap B) \leq P(B) \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) \geq 0$$

Porque $A \cap B \subset B$

Entonces $P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{\geq 0} \geq P(A)$

• Supongamos $P(A) \leq P(B)$:

$$P(A \cap B) \leq P(A) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) \geq 0$$

Entonces $P(A \cup B) = \underbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}_{\geq 0} \geq P(B)$

9. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran dos sucesos A y B tales que $\mathbb{P}(A) = 1/3$ y $\mathbb{P}(B) = 1/2$. Determinar el valor de $\mathbb{P}(A^C \cap B)$ en los siguientes casos:

(a) A y B incompatibles (mutuamente excluyentes).

(b) $A \subset B$.

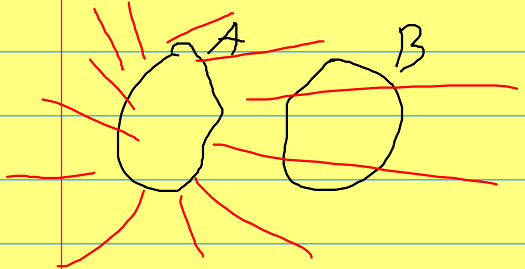
(c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/8$.

$A^c \cap B = B \setminus A$

a) Calcular $P(A^c) \to P(A^c) = 1 - P(A) = 2/3$

$P(A) = 1/3, \quad P(B) = 1/2$

a) $A \cap B = \emptyset \to A^c \cap B = B$ por que $B \subset A^c$



$P(A^c \cap B) = P(B) = 1/2$

b) Vimos que $P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

$A \subset B \to A \cap B = A \to P(B \cap A^c) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

c) Usar con $P(A \cap B) = 1/8$

10. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $\mathbb{P}(A) = 3/8$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

(a) $\mathbb{P}(A^C)$ y $\mathbb{P}(B^C)$.

(b) $\mathbb{P}(A \cup B)$.

(c) $\mathbb{P}(A^C \cap B^C)$.

(d) $\mathbb{P}(A^C \cap B)$ y $\mathbb{P}(A \cap B^C)$.

c) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

d) $A^c \cap B = B \setminus A$

$A \cap B^c = A \setminus B$

11. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

(a) * Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(b) * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

a) Exclusión - Inclusión : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap C)$

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C)$$

$$= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

distributiva

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(\underbrace{(A \cap C) \cap (B \cap C)}_{A \cap B \cap C})]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

(b) * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \quad (*)$$

Caso base: Con $n=2$ es P.I.E.
Con $n=3$ es la parte (a)

Caso inductivo: Supongamos que $(*)$ vale para $n=h$
Queremos ver que vale para $n=h+1$

$$P(\bigcup_{i=1}^{h+1} A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{h} A_i) \cup A_{h+1})$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^{h} A_i) + P(A_{h+1}) - P((\bigcup_{i=1}^{h} A_i) \cap A_{h+1})$$

P.I.E.

Vale la hipótesis inductiva

$$\sum_{i=1}^{h+1} P(A_i)$$

$$= \sum_{i}^{h} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq h} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{h-1} P(A_1 + \cdots + A_h)$$

$$+ P(A_{h+1}) - P\left(\left[\bigcup^{h} A_i\right] \cap A_{h+1}\right)$$

$$\bigcup_{i=1}^{h} (A_i \cap A_{h+1})$$

$$= \sum_{i}^{h+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq h} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{h-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_h) - P(\bigcup_{i=1}^{h} (A_i \cap A_{h+1}$$

Vale hipótesis inductiva

$$= \sum_{i}^{h+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i\leq j\leq h} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{h-1} P(A_1 \cap \cdot \quad A_h)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1})$$

$$-\sum_{1\le i\le j\le n} P((A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\underbrace{(A_1 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1}})$$

$$\sum_{1\le i\le j\le n+1} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{(n+1)-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n+1})$$