23/5

- Esperanza (valor esperado, "media")

$\mathcal{X}$ v.a. discreta. $E(\mathcal{X}) = \sum_{k \in Rec(\mathcal{X})} k \cdot p_{\mathcal{X}}(k)$

continua. $E(\mathcal{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{\mathcal{X}}(x) \, dx$

$\mathcal{X} \sim Ber(p) \rightarrow Rec(\mathcal{X}) = \{0, 1\}$

$$E(\mathcal{X}) = \underbrace{0 \; p_{\mathcal{X}}(0)}_{\substack{0 \cdot (1-p) \\ \shortparallel \\ 0}} + \underbrace{1 \; p_{\mathcal{X}}(1)}_{1 \cdot p} = p$$

- $\mathcal{X} \sim Geo(p) \rightarrow Rec(\mathcal{X}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow p_{\mathcal{X}}(k) = (1-p)^{k-1} p$

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \, (1-p)^{k-1} p$$

$$= p \sum_{k=1}^{+\infty} \boxed{k(1-p)^{k-1}}$$

$\hookrightarrow k(1-p)^{k-1} = \left(-(1-p)^{k} \right)'$

$$= p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

<u>Teorema</u>: Si $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ es abs. conv.,

entonces $\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d f_k(x)}{dx}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-(1-p)^{k}\right)'$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} -(1-p)^{k}\right)'$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k}\right)'$$

$\sum (1-p)^k$ es una serie geométrica

$$= -\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)'$$

$$= -\left(\frac{1}{p}\right)'$$

$$= -\left(-\frac{1}{p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

$E(X) = \frac{1}{p}$

$p = \frac{1}{2}$ $\quad E(X) = \frac{1}{1/2} = 2$

- $p \to 0, \quad E(X) \longrightarrow +\infty$

media

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

σ es desviación estandar

$$\boxed{E(X) = \mu}$$

Propiedades de esperanza:

- Es lineal: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
  $E(aX) = a\,E(X)$ $\quad a \in \mathbb{R}$

- $X = a \Rightarrow E(X) = a$ $\quad a \in \mathbb{R}$

  $Rec(X) = \{0, a\},$ $\quad p_X(0) = 0$
  $p_X(a) = 1$

- X e Y son independientes $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Varianza:

$$Var(X) = E\left(\boxed{(X - E(X))}^2\right)$$

Prop: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Propiedades:

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(X) = 0 \iff X = a$ para algún valor $a \in \mathbb{R}$
- $Var(X + a) = Var(X)$
- $Var(bX) = b^2 Var(X)$
- X e Y son independientes $\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

- $X \sim Ber(p)$

$$Var(X) = E(X^2) - \underbrace{\boxed{E(X)}}_{p}{}^2$$

- $E(X^2) = \sum_{k \in Rec(X)} k^2 \, p_X(k)$

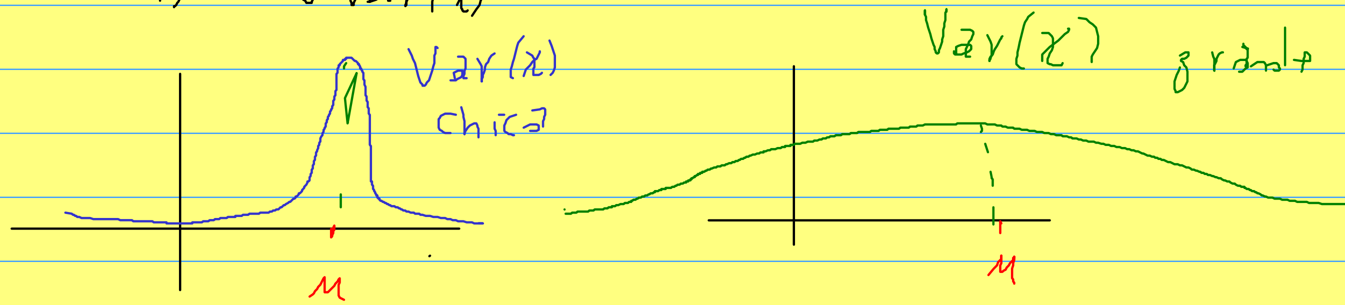
$$= 0^2 \, p_X(0) + 1^2 \, p_X(1)$$

$$= p$$

$$Var(X) = p - p^2$$
$$= p[1-p]$$

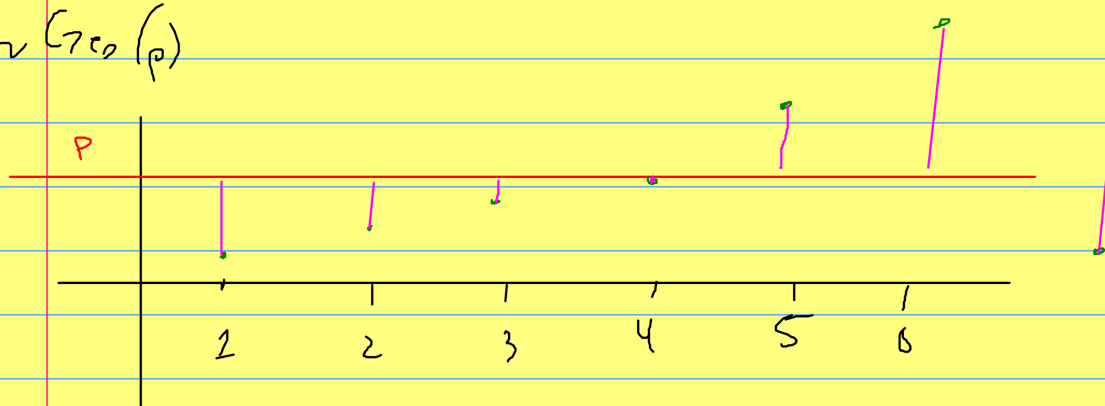
Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$



• $$Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

$X \sim Geo(p)$



$X \sim Geo(p)$

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad -\frac{1}{p^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{K=1}^{+\infty} K^2 (1-p)^{K-1} p$$

$$= p \sum_{K=1}^{+\infty} K^2 (1-p)^{K-1}$$

$\hookrightarrow k^2(1-p)^{k-1} = \left(-k\,(1-p)^k\right)'$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-k\,(1-p)^k\right)'$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)^k\right)'$$

$$= -\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)(1-p)^{k-1}\right)'$$

$$= -\left((1-p)\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1}}_{\frac{1}{p^2}}\right)'$$

$$= -\left(\frac{1-p}{p^2}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right)'$$

$$= -\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = p\left(-\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Práctica 8

Desigualdad de Chevishoff (o Chebyshov)

Dado $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - E(X)| \geq \varepsilon\}$$

Ejercicio 1
Se realiza una encuesta para tratar de estimar el porcentaje de votos de determinado candidato. Al final de la misma se tendrán n respuestas (que asumimos independientes), representadas en la muestra $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de realizaciones de la variable de Bernoulli de parámetro p (la probabilidad de que una persona elegida al azar en la población vote por el candidato en cuestión).

1. A partir de la mencionada muestra ¿Qué valor usaría usted para estimar p?.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } p \\ 0 & \text{'' '' } 1-p \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n} = \overline{X}_n}$$

2. Usando la Desigualdad de Chevishoff (y antes de tomar la muestra) ¿Cuántos datos tomaría para que, con una probabilidad de al menos 0,95, el estimador no distara del valor de p más de un 0,03?. (Sugerencia: Demuestre y use que para cualquier valor de $p \in [0,1]$ se cumple $p(1-p) \leq 1/4$).

$$P(|X_n - p| \leq 0{,}03) \geq 0{,}95$$

$$\Updownarrow$$

$$P(|X_n - p| \geq 0{,}03) \leq 0{,}05$$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

- Hay que ver si $E(\overline{X}_n) = p$

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{E(X_j)}^{p}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p$$

$$= \frac{n \cdot p}{n}$$

$$= p$$

Chevyshov: $P(|\overline{X}_n - p| \geq \overbrace{0{,}03}^{\varepsilon}) \leq \boxed{\frac{Var(\overline{X}_n)}{(0{,}03)^2} \leq 0{,}05}$

Queremos encontrar n para que valga.

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)$$

X_j son independientes

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} p$$

$$= \frac{n\,p(1-p)}{n^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\frac{\mathrm{Var}(\overline{X}_n)}{(0{,}03)^2} \leq 0{,}05$$

Encontrar n para que $\quad \dfrac{p(1-p)}{n\cdot(0{,}03)^2} \leq 0{,}05$, $\quad p(1-p) \leq \frac{1}{4}$