27/4

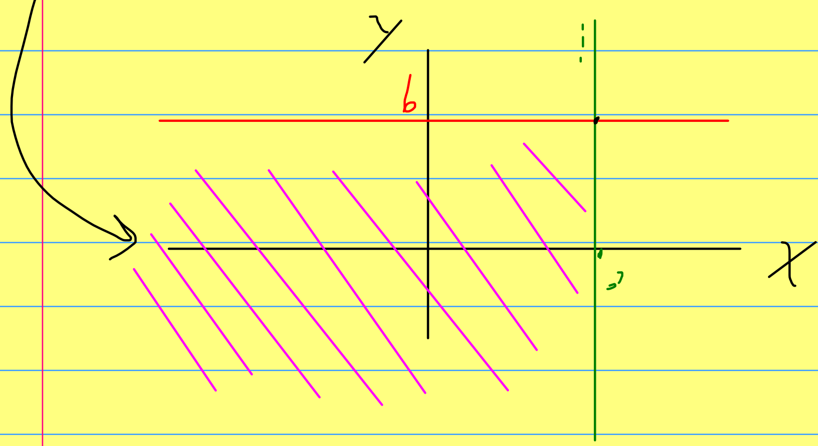
Distribución conjunta

Si X e Y son variables aleatorias

$$P(X=x, Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

Función de distribución:

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$



Ejercicio 1

Se considera un grupo de 9 personas de las cuales hay 2 que son contadores y 3 que son abogados. Se eligen al azar 5 personas de ese grupo de 9. Se definen: X = Cantidad de contadores en las 5 personas elegidas e Y = Cantidad de abogados en las 5 personas elegidas

1. ¿Qué valores pueden tomar las variables aleatorias X e Y?
2. Construir la función de probabilidad (puntual) conjunta de X e Y.
3. A partir de b), halle las funciones de probabilidad (puntual) marginales de X e Y.
4. Calcular $P\{X = Y\}$
5. ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

1) $Rec(X) = \{0, 1, 2\}$

$Rec(Y) = \{0, 1, 2, 3\}$

2) $R_{ec}(X,Y) = \left\{ \begin{array}{llll} (0,0), & (0,2), & --- & \\ ..(1,0), & (2,2) & --- & \\ (2,3) & .. & & \end{array} \right\}$

$= \{ (i,j) : 0 \le i \le 2, \quad 0 \le j \le 3 \}$

X/Y	0	1	2	3
0				
1				
2				

La cantidad de abogados

Cantidad de contadores

La cantidad que no son ni abogados ni contadores

$$P(X=0, Y=1) = \frac{C_1^3 \, C_0^2 \, C_4^4}{C_5^9}$$

Casos totales

$$P(X=1, Y=2) = \frac{C_2^3 \, C_1^2 \, C_2^4}{C_5^9}$$

. Probabilidad puntual marginal :

$$P_X(y) = \sum_{x \in Rec(X)} p(x, y)$$

y fijo

$$= p(0,y) + p(2,y) + p(2,y)$$

$\longrightarrow$ x fijo

$$p_Y(x) = \sum_{x \in R_x(Y)} p(x,y)$$

$$= p(x,0) + p(x,2) + p(x,2) + p(x,3)$$

$P(\{(0,0)\}) = 0$

4) $P(\{X = Y\}) = P(\boxed{\{(0,0)\}} \cup \{(2,2)\} \cup \{(2,2)\})$

$$= P(\{(2,2)\} \cup \{(2,2)\})$$

$$= P(2,2) + P(2,2)$$

5)

Def: X e Y son independientes si:

$$P_{XY}(X=x, Y=y) = P_X(X=x)\, P_Y(Y=y)$$

$P(X=0, Y=0) = 0$:

$P(X=0) > 0$

$P(Y=0) > 0$

$\Big\}\ P(X=0)\,P(Y=0) > 0$

X e Y no son independientes

Distribución conjunta → Caso continuo.

$$P(X=x, Y=y) = 0$$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$p_{X,Y}$ es una densidad conjunta si:

- $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $p_{X,Y}(x,y) \ge 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} p_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p_{X,Y}(u,v)\, du\, dv}$$

$$F_X(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(u,y)\, du \quad , \quad F_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{X,Y}(x,v)\, dv$$

- Cómo calcular las marginales a partir de la distribución conjunta

$$F_X(x) = P(X \le x) \overset{\text{informal}}{=} P(X \le x, Y \le +\infty)$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \underbrace{P(X \leq x, Y \leq y)}_{F_{X,Y}(x,y)}$$

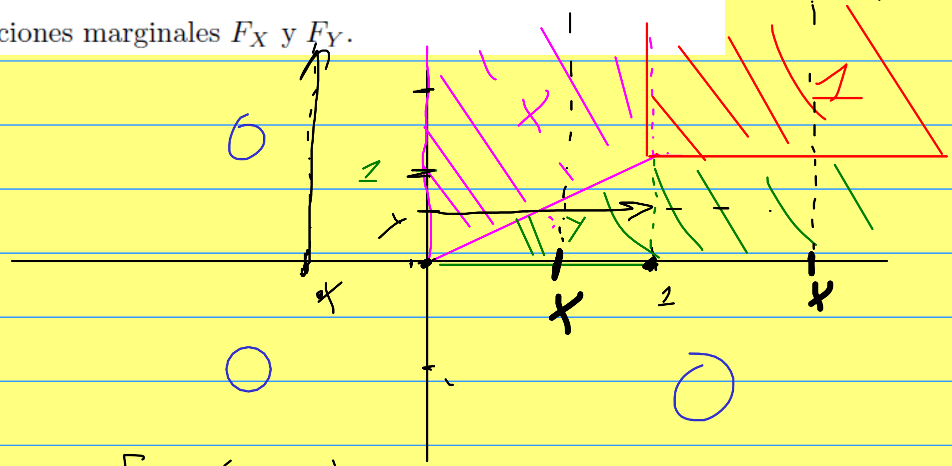
$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} P(X \leq x, Y \leq y) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} P(X \leq x, Y \leq y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x,y)$$

5.1. Sean X e Y dos variables aleatorias cuya distribución conjunta es

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1,\ y \geq 1 \\ y & \text{si } y \in [0,1),\ x \geq y \\ x & \text{si } x \in [0,1),\ y > x \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Hallar la distribuciones marginales F_X y F_Y.



$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{XY}(x,y)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0,1) \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Clase de consulta

Ejercicio 8
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *iid* con distribución F.

1. Calcular la función de distribución de $X_n^* = max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
2. Calcular la función de distribución de $X_1^* = min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

$$\min\{a,b\} = -\max\{-a,-b\}$$

$$\min(3,5) = 3 = \boxed{-\max(-3,-5)}$$

1) $X_n^* = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

$$F(X_n^* \leq k) = F(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq k)$$

$$\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq k \iff X_1 \leq k, \ldots, X_n \leq k$$

$$= F(X_1 \leq k, X_2 \leq k, \ldots, X_n \leq k)$$

$$= F(\underline{X_1} \leq k)\, F(\underline{X_2} \leq k) \cdots F(\underline{X_n} \leq k)$$

Los $X_1, \ldots, X_n$ son independientes

$$= F(X_1 \leq k)^n$$

Todos tienen la misma distribución

Ejercicio 1

Ana selecciona dos números diferentes al azar del conjunto $\{8,9,10\}$ y los suma. Beto toma dos números diferentes al azar del conjunto $\{3,5,6\}$ y los multiplica. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de Ana sea mayor que el de Beto?

(A) $4/9$ **(B)** $5/9$ **(C)** $1/2$ **(D)** $1/3$ **(E)** $2/3$

$\Omega_A = \{17, 18, 19\}$

$\Omega_B = \{15, 18, 30\}$

$\frac{4}{9}$

PREGUNTA 4

En una escuela, el peso de los distintos alumnos se puede modelar como una variable aleatoria continua, en particular como una normal con valor medio 34kg, y desviación estándar 5kg ($\mu = 34, \sigma = 5$). En dicha escuela se utiliza una balanza para pesar a los alumnos que sólo puede tomar valores enteros. Más aún, al pesar a un alumno, la balanza retorna el peso de dicho alumno pero redondeado hacia abajo. Por ejemplo, si un alumno pesa 40kg la balanza retorna 40kg, pero si un alumno pesa 34.95kg la balanza retorna 34kg. Sea Y la variable aleatoria que indica el valor retornado por la balanza al pesar un alumno, encontrar k entero para el cual $P(Y > k) = 0.4207$.

$K=5$, $P(Y > 5) = P(Y \geq \overset{K+1}{5+1})$

La balanza no tiene decimales.

PREGUNTA 3

Se dispone de una colección de escarabajos formada por once ejemplares: seis pertenecientes a cierta especie A, tres pertenecientes a la especie B y dos perteneciente a una tercera especie C. El índice de diversidad introducido por el físico Leon Brillouin depende del número H: la cantidad de formas posibles de ordenar los ejemplares si sólo tenemos en cuenta la clasificación en especies. ¿Cuánto vale H en este caso?

11 escarabajos
6 A
3 B
2 C

Una palabra de 11 letras L
$L \in \{A, B, C\}$

$$\boxed{C^{11}_{6}\, C^{5}_{3}}\ \overset{1}{\boxed{C^{2}_{2}}} \qquad \left\{\ \boxed{C^{11}_{2}\, C^{9}_{3}}\ \boxed{C^{6}_{6}}\ 1\right.$$

4. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro λ y μ, respectivamente. Entonces, la función de distribución de la variable $U = X/(X+Y)$ es:

A.

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & \cancel{\text{si } t \leq 0;} \\ 1 - e^{-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}t}, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

B.

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0; \\ \frac{\lambda t}{\lambda t + \mu(1-t)}, & \text{si } t \in (0,1); \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

C.

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0; \\ \cancel{\frac{\lambda\mu}{(\lambda t+\mu(1-t))^2}}, & \text{si } t \in (0,1); \\ 0, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

D.

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0; \\ \cancel{\frac{\mu(1-t)}{\lambda t+\mu(1-t)}}, & \text{si } t \in (0,1); \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

E.

$$F_U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0; \\ 1 - e^{-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t}, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

$\lim_{t\to 0^+} \overline{F(t)}^{0} = \overline{F(0)}^{0}$

$\underbrace{\lim_{t\to 1^-} F(t) = F(1)}_{1}$

$\overline{\lim_{t\to 0^-} F(t)}^{0} = F(1)$ $\overline{}^{1}$

$\lim_{t\to -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t\to +\infty} F(t) = 1$

$F_U(t) = P(U \leq t)$

$= P\left(\frac{X}{X+Y} \leq t\right)$

$X \geq 0$

$Y \geq 0$

Obs: $\frac{X}{X+Y} \leq 1$ $\Rightarrow$ Si $t \geq 1$,

$P\left(\frac{X}{X+Y} \leq 1 \leq t\right) = 1$

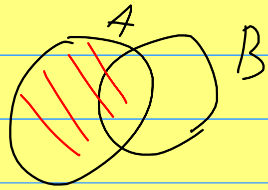
Ejercicio 3 (3 puntos)

Dado que $P(A \cup B) = 0.76$ y $P(A \cup B^c) = 0.87$, hallar $P(A)$.

(A) 0.11 **(B)** 0.185 **(C)** 0.315 **(D)** 0.37 **(E)** 0.63 **(F)** 0.815

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$(A\cup B)\cap(A\cup B^c)=A$



$(A\cup B)\cup(A\cup B^c)$

$\shortparallel$

$A\cup B\cup B^c = A\cup\Omega=\Omega$

$$P((A\cup B)\cap(A\cup B^c)) = -\overbrace{P((A\cup B)\cup(A\cup B^c))}^{1} + P(A\cup B) + P(A\cup B^c)$$

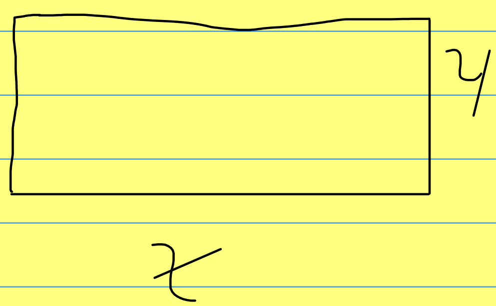
Problema 5 (8 puntos)

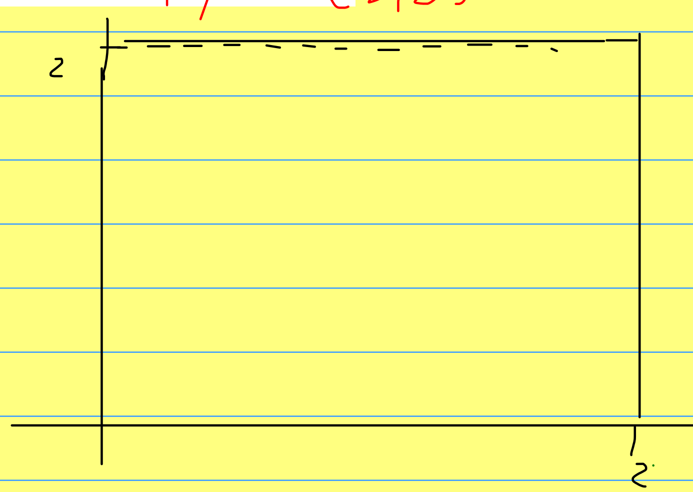
Considere un rectángulo de base X y altura Y, donde X e Y son variables aleatorias *independientes e idénticamente distribuidas* con distribución uniforme en el intervalo $[0,2]$. Sea U el perímetro y A el área del rectángulo.

a) **(4 puntos)** Calcule la función de distribución de U.

b) **(4 puntos)** Calcule $\mathbf{E}(U)$ y $\mathbf{E}(A)$.

$X, Y \sim [0,2]$





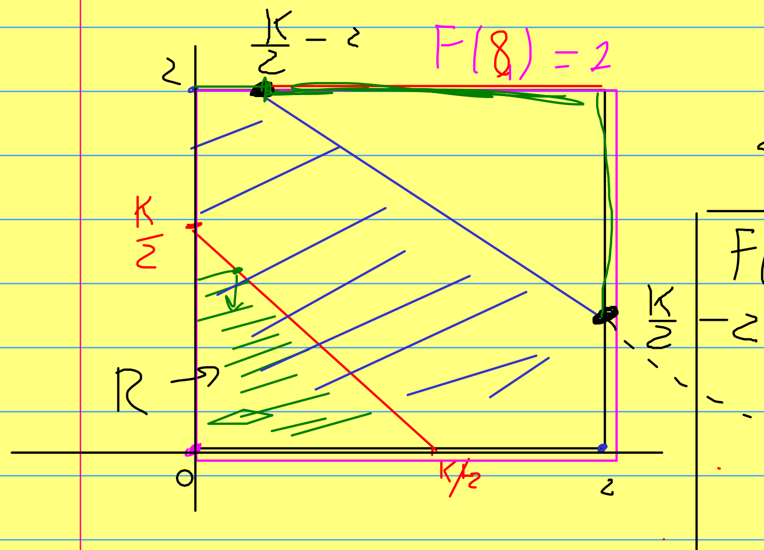
U es el perímetro $\rightarrow$ $U = 2X + 2Y$

$$F_U(K) = P(U \leq K) = P(2X+2Y\leq K)$$

$$= P\left(X+Y \leq \frac{K}{2}\right)$$

$$\{X+Y \leq \tfrac{K}{2}\} = \{X \leq \tfrac{K}{2} - Y\}$$

$K > 0$



$y = -x + \frac{K}{2}$

$2 = -x + \frac{K}{2}$ $\quad x = \frac{K}{2} - 2$

$$F(K) = \iint_R p_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$y = -x + \frac{K}{2}$

$y = -2 + \frac{K}{2}$

$2 - \left(\frac{K}{2} - 2\right) = 4 - \frac{K}{2}$

$X, Y \sim U([0,2]) \to p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$K \leq 4$ $\quad \iint_R \frac{1}{4}\,dx\,dy = \frac{\text{Area}(R)}{4} = \frac{\frac{\left(\frac{K}{2}\right)^2}{2}}{4}$

$$= \frac{K^2}{32}$$

$\underline{K > 4}$; $\frac{1}{4}\text{Area}(R) = \frac{1}{4}\left[4 - \frac{\left(4 - \frac{K}{2}\right)^2}{2}\right]$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - \frac{1}{2}\left(16 - 4K + \frac{K^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - 8 + 2K - \frac{K^2}{8}\right]$$

$$= 1 - 2 + \frac{K}{2} - \frac{K^2}{32}$$

$K > 4,$ $\quad F_U(K) = -\frac{K^2}{32} + \frac{K}{2} - 1$

$\boxed{F_U(8) = 1}$

$$F_U(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } K \leq 0 \\ \frac{K^2}{32} & \text{si } K \leq 4 \\ -\frac{K^2}{32} + \frac{K}{2} - 1 & \text{si } K > 4 \\ 1 & \text{si } K \geq 8 \end{cases}$$

$K < 4$

$4 - \overline{\text{Area}}\ (\text{Verde})$