25/4

Ejercicio 6

1. En la densidad normal estándar, encuentre el área bajo la curva que está:

   a) a la derecha de $z = 1{,}84$.

   b) entre $z = -1{,}97$ y $z = 0{,}86$.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2}$$

$$X \sim N(0, 1)$$

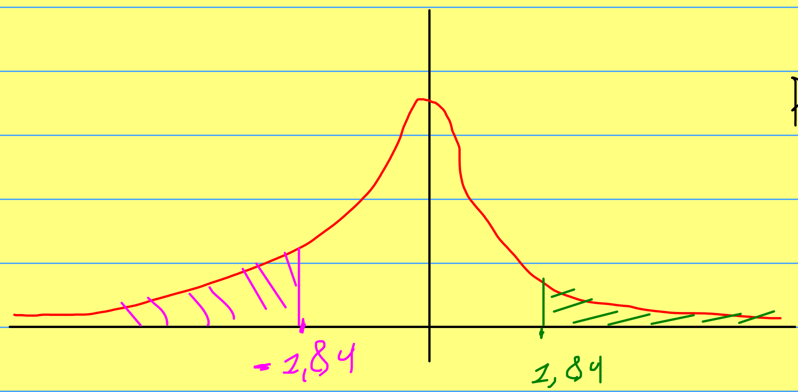
desviación estándar σ

media μ

$$\int_{1,84}^{+\infty} \varphi(z)\, dz = P(X \geq 1{,}84)$$

$$= 1 - P(X \leq 1{,}84)$$

a) $P(X \geq 1{,}84) = \ldots$



$$P(X \geq a) = P(X \leq -a)$$

$$X \sim N(40, 36)$$

3. En una distribución normal con $\mu = 40$ y $\sigma = 6$, encuentre el valor de x que tiene:

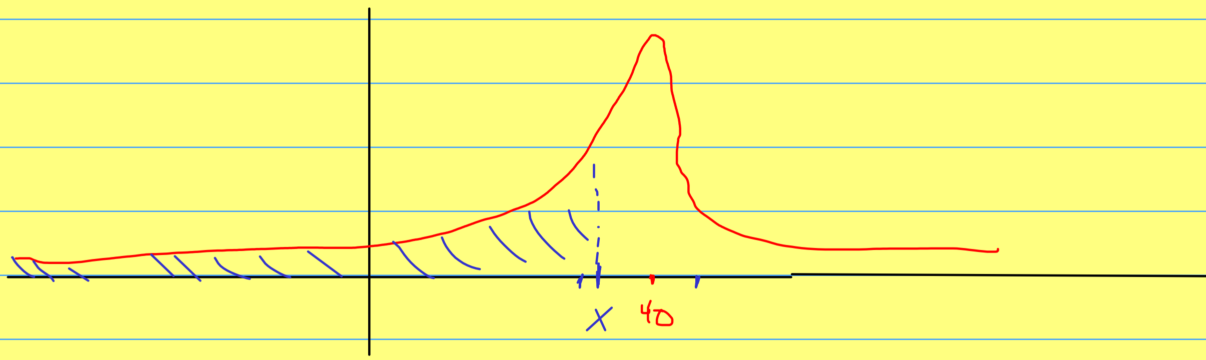
   a) 45 % del área a la izquierda.

   b) 14 % del área a la derecha.

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \underbrace{N(0,1)}_{\text{Normal estandar}}$$

a) Encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que el 45 % del área quede a la izquierda de x.



Es decir, encontrar $x \in \mathbb{R}$ para que $P(X \le x) = 0{,}45$

$Z = \frac{X-40}{6}$ → Normal estandar.

En la tabla podemos encontrar z tal que

$$\underbrace{P(Z \le z) = 0{,}45}$$

Problema 0,45 no está en la tabla de $P(Z \le z)$, entonces buscamos en la la otra tabla:

$P(Z \geq -z) = 0,45$

$P(Z \geq 0,22) = 0,4522$

$P(Z \geq 0,23) = 0,4483$

Podemos tomar $w = \frac{0,23 + 0,22}{2} = 0,225$

$0,4522 \geq P(Z \geq w) \geq 0,4483$

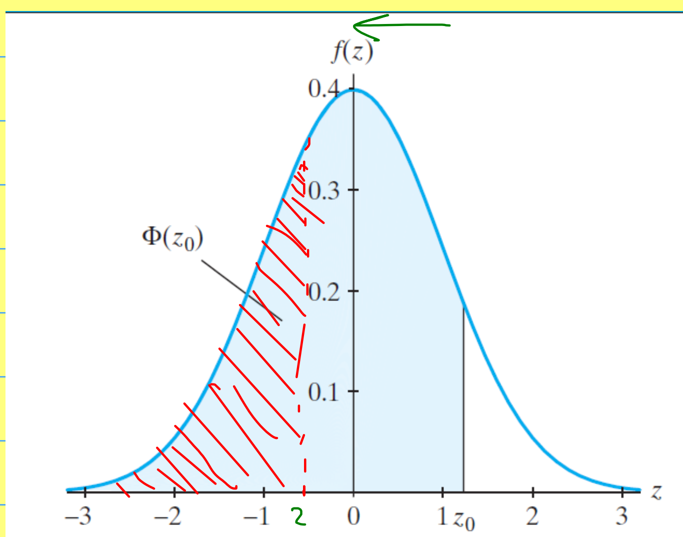
- $z = -w = -0,225$

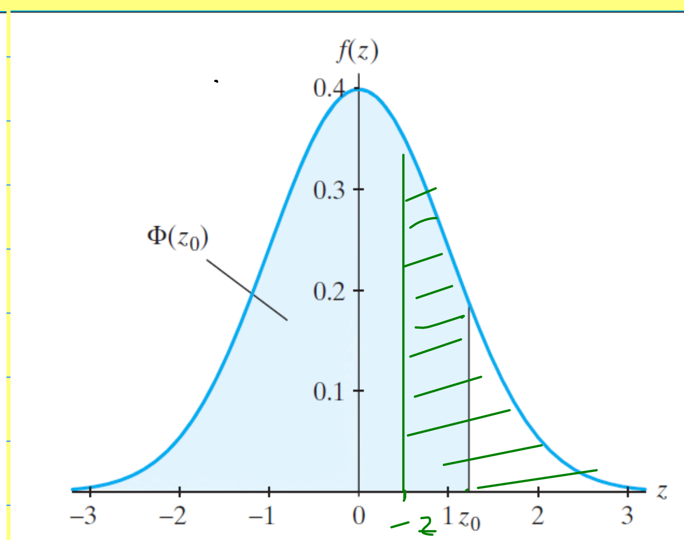
- $\frac{x - 40}{6} = z \to x = 6z + 40$

$= -0,75 + 40$

$= 39,25$

$P(Z \leq z)$





$P(Z \leq z) = 1 - \boxed{P(Z > z)}$

$\shortparallel$

$P(Z \leq -z)$

$\boxed{\underbrace{P(Z \leq z)}_{< 0,5}} = 1 - \boxed{\underbrace{P(Z \leq -z)}_{> 0,5}}$

Si solo tenemos una tabla ($P(Z \leq z)$)
y queremos encontrar z para que $P(Z \leq z) = a < 0{,}5$

a no está en la tabla

Entonces, usamos

$$\underbrace{P(Z \leq z)}_{a} = 1 - P(Z \leq -z)$$

$$P(Z \leq -z) = \underbrace{1 - a > 0{,}5}$$

Si está en la tabla

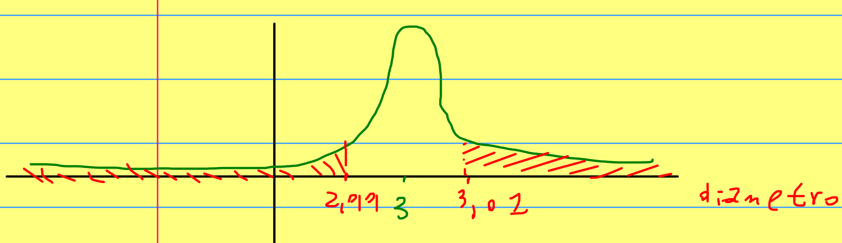
Por último, debemos recordar que la tabla nos dará $-z$, y nosotros queremos z.

Ejercicio 7
En un proceso industrial el diámetro de un balero es parte importante de un componente. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser $3{,}0 \pm 0{,}01$ cm. Por lo tanto, no se acepta ningún balero que se salga de esa especificación. Se sabe que en el proceso de producción, el diámetro de un balero tiene una distribución normal con media $\mu = 3{,}0$ cm y desviación estándar $\sigma = 0{,}005$ cm. En promedio, ¿qué porcentaje de baleros fabricados se descartarán?

Un balero se descarta si:

diámetro $> 3{,}01$
diámetro $< 2{,}99$

$X \sim N(3,\ 0{,}005^2)$



$P(X < 2{,}99) + P(X > 3{,}01)$

Como X no es una distribución normal estándar, tendremos que hacer el cambio de variable

$$\frac{X-3}{0{,}005} = Z \rightarrow \text{Normal estándar.}$$

$$P\left(\frac{X-3}{0{,}005} \le \frac{2{,}99-3}{0{,}005}\right) + P\left(\frac{X-3}{0{,}005} \ge \frac{3{,}01-3}{0{,}005}\right)$$

$$P\left(Z \ge \frac{0{,}01}{0{,}005}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{100}}{\frac{5}{1000}} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1000}{5} = 2$$

$$\boxed{P(Z \ge 2) = 0{,}0228}$$

$$\|$$

$$\boxed{P(X \ge 3{,}02) = 0{,}028}$$

Por simetría, $P(X \le 2{,}99) = 0{,}028$

El porcentaje que se descartan es $\underbrace{(2 \times 0{,}028)}_{0{,}056} \times 100$

$$\underbrace{0{,}056 \times 100}_{5{,}6\,\%}$$

Ejercicio 9

Considere la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0}$$

1. Demuestre que f es una función de densidad para cualquier valor de $\lambda > 0$. Si una variable aleatoria X absolutamente continua tiene una densidad de esta forma se dice que X tiene *distribución exponencial* de parámetro λ ($X \sim \exp(\lambda)$).
2. Si $X \sim \exp(\lambda)$ hallar y graficar la función de distribución F_X.
3. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0,90. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar x_0. Halle también la menor cantidad de años enteros que cumple con la condición.

1) Hay que probar $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

2) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

• Si $x < 0 \Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \leq x \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

es decir, $F(x) = 0$

• Si $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} \overbrace{f(t)}^{0}\,dt + \int_{0}^{x} \overbrace{f(t)}^{\lambda e^{-\lambda t}}\,dt$$

$$F(x) = \int_{0}^{x} \overbrace{\lambda e^{-\lambda t}\,dt}^{-dy}$$

$y = -\lambda t$

$dy = -\lambda\,dt$

$$= \int_{0}^{-\lambda x} -e^{y}\,dy$$

$$= -\int_0^{-\lambda x} e^y \, dy$$

$$= -e^y \Big|_0^{-\lambda x}$$

$$= -\left[e^{-\lambda x} - \overset{1}{e^0} \right]$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

3. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0,90. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar x_0. Halle también la menor cantidad de años enteros que cumple con la condición.

$$X \sim \exp(\overbrace{0{,}01}^{\lambda}) \qquad P(X \geq x_0) = 0{,}9$$

$$0{,}9 = P(X \geq x_0) = 1 - P(X < x_0) = 1 - F(x_0) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda x_0}\right]$$

$$0{,}9 = e^{-\lambda x_0} \qquad \left\} \begin{array}{c} P(X \geq x_0) \\ \shortparallel \\ e^{-\lambda x_0} \end{array} \right.$$

$$\ln(0{,}9) = -\lambda x_0$$

$$-\frac{\ln(0{,}9)}{\lambda} = x_0 \qquad \lambda = 0{,}01$$

Entonces, $x_0 = 10{,}54$

El entero más cercano será $x_0 = 10$.