20/4 Parcial: Jueves 28/4.

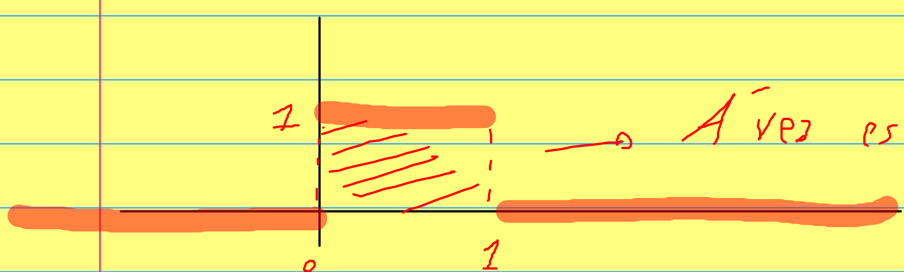
**Def:** Una densidad de probabilidad es una función

$$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

que cumple: i) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

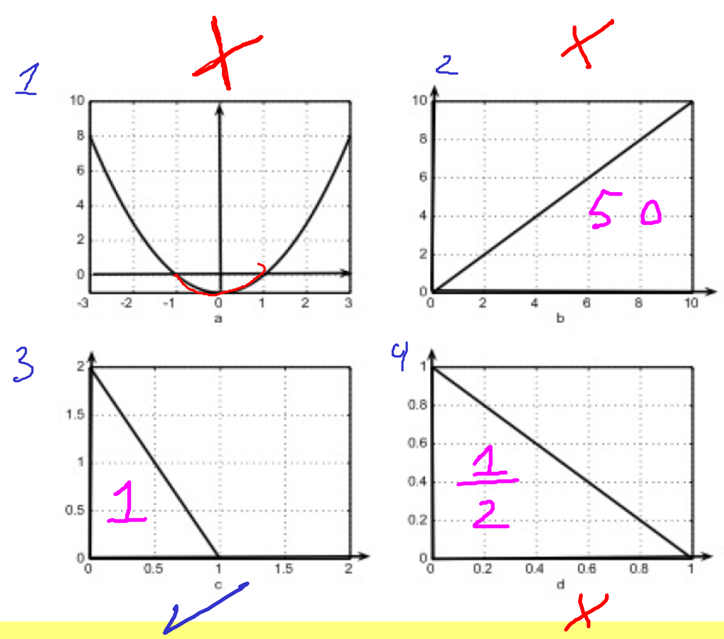
ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$

**Ej:** $p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$




$\to$ Área es 1 $\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$

**Ejercicio 1**
¿Cuáles de las gráficas de la figura corresponden a una densidad y cuáles no?



**Def:** Una variable aleatoria $X$ es absolutamente continua, si existe una densidad de probabilidad tal que

$$P(X \in (a,b)) = \int_a^b p(x)\,dx$$

$(a,b)$ un intervalo en $\mathbb{R}$

**Obs:** • Sea $X$ una v.a.a.c., $P(\{X = a\}) = 0$

• $F(a) = P(X \leq a) = P(X \in (-\infty, a)) = \int_{-\infty}^{a} p(x)\,dx$

Siempre es así

Si $X$ es una v.a.a.c.

**Recordatorio:**

- $F$ es monótona creciente
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $F$ es continua por derecha.

Lo nuevo: Si la densidad $p$ es continua:

- $F$ es continua
- $F'(x) = p(x)$

**Ejercicio 2**
Se considera la variable aleatoria $X$ absolutamente continua con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \in (0,1] \\ ae^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallar $a$ y $b$ sabiendo que $\mathbf{P}(X \in [0,2]) = 2\mathbf{P}(X \in [2,4])$.

- $p(x) \geq 0$
- $\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$

$$P(X \in [0,2]) = \int_0^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 bx\,dx + \int_1^2 ae^{-x}\,dx$$

$$P(X \in [2,4]) = \int_2^4 f_X(x)\,dx = \int_2^4 a e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^1 bx\,dx + \int_1^2 ae^{-x}\,dx = 2\left[\int_2^4 ae^{-x}\,dx\right]$$

$$\frac{b}{2} + a\left(-e^{-2} - (-e^{-1})\right) = 2a\left(-e^{-4} - (-e^{-2})\right)$$

$$\frac{b}{2} + -ae^{-2} + ae^{-1} + 2ae^{-4} - 2ae^{-2} = 0$$

$$\boxed{\frac{b}{2} + a\left[-3e^{-2} + e^{-1} + 2e^{-4}\right] = 0}$$

Usando que $f_X(x)$ es densidad, sabemos $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 0 \cdot dx}_{0} + \underbrace{\int_0^1 bx\,dx}_{\frac{b}{2}} + \int_1^{+\infty} ae^{-x}\,dx = 1$$

$$\int_1^{+\infty} 2e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} 2e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[ 2\left[-e^{-t} - (-e^{-1})\right]\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -2\overset{\to 0}{e^{-t}} + 2e^{-1} = 2e^{-1}$$

Entonces,

$$\boxed{\frac{6}{2} + 2e^{-2} = 1}$$

Resolver el sistema.

---

**Ejercicio 3**
Se consideran las siguientes funciones reales:

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{x} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

1. En cada caso, hallar $c_i$ para que $\underbrace{f_i \text{ sea una densidad}}$

$f_1(x) \geq 0$

$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx = 1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx = \int_0^1 c_1\sqrt{x}\,dx$$

$$= c_1 \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

$$= c_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= c_1 \cdot \frac{2}{3} = 1$$

Queremos

Entonces $\boxed{c_1 = \frac{3}{2}}$

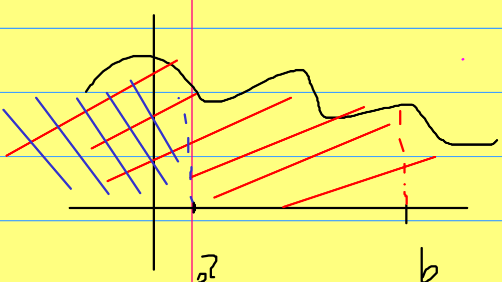
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

2. Se considera ahora una variable aleatoria $X$ con densidad $f_i$ (con el $c_i$ hallado).

   a) Calcular $\mathbf{P}(0{,}3 < X < 0{,}6)$, $\mathbf{P}(X > 2)$ y $\mathbf{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

   b) Hallar la función de distribución de $F_X$ para cada densidad y graficar.

a) $P(0.3 < X < 0.6) = \int_{-\infty}^{0.6} f_1(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0.3} f_1(x)\,dx$




$$= \int_{0.3}^{0.6} f_1(x)\,dx$$

$$= \int_{0.3}^{0.6} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$

$X \in (2, +\infty)$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_{-\infty}^{2} f_1(x)\,dx$$

$$\| $$

$$\int_{2}^{+\infty} f_1(x)\,dx$$

b) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt$

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{t} & \text{si } t \in (0,1) \\ 0 & \text{si } t \notin (0,1) \end{cases}$$

Si $x \leq 0$: $\quad F(x) = 0$

Si $x \in (0,1)$: $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt = \overbrace{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt}^{0} + \int_{0}^{x} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt$

$$= \overbrace{\boxed{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}}}^{1}\, t^{3/2} \Big|_{0}^{x} = x^{3/2}$$

Si $x \geq 1$: $\quad F(x) = 1$

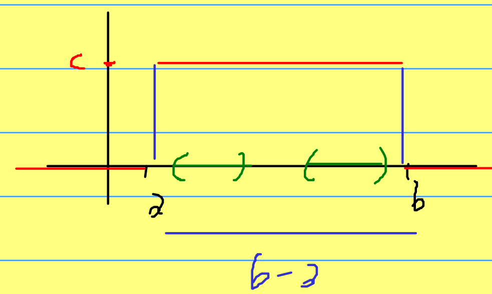
$$\int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt = \overbrace{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt}^{0} + \overbrace{\boxed{\int_{0}^{1} \frac{3}{2}\sqrt{t}\,dt}}^{1} + \overbrace{\int_{1}^{x} 0 \cdot dt}^{0}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^{3/2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

# Distribución uniforme

$X \sim U(a,b)$

$$\boxed{p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{si } x \notin (a,b) \end{cases}}$$

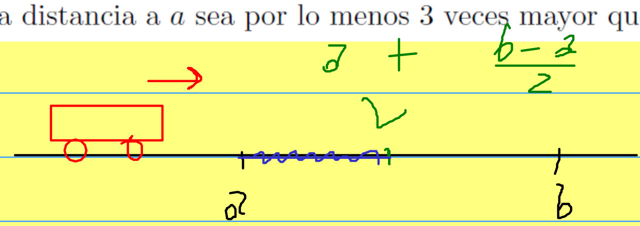



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

**Ejercicio 4**

En pruebas de medición de distancia de frenado de automóviles, los vehículos que viajan a determinada velocidad tienden a recorrer distancias de frenado que están distribuidas uniformemente entre dos puntos $a$ y $b$. Calcular la probabilidad de que uno de estos automóviles:

1. se detenga más cerca de $a$ que de $b$.
2. se detenga de tal modo que la distancia a $a$ sea por lo menos 3 veces mayor que la distancia a $b$.




1) $P\left(a \leq X \leq a + \frac{b-a}{2}\right) = \int_a^{a+\frac{b-a}{2}} \frac{1}{b-a}\, dx$

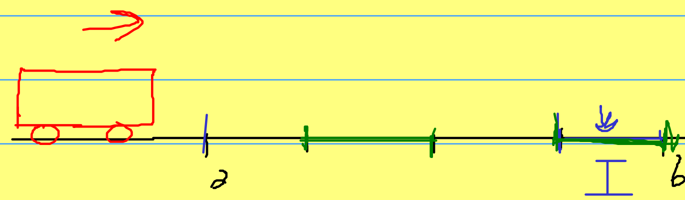
$= \frac{1}{\cancel{b-a}}\left[\cancel{a} + \frac{\cancel{b-a}}{2} - \cancel{a}\right]$

$= \frac{1}{2}$

Obs: Si $X \sim U(a,b)$, e $I \subset (a,b)$

entonces $P(X \in I) = \dfrac{\text{long}(I)}{\text{long}(a,b)}$

2)




$\text{long}(I) = \dfrac{b-a}{4}$

$$P(X \in I) = \frac{\text{long}(I)}{\text{long}(a,b)} = \frac{\frac{\cancel{b-a}}{4}}{\cancel{b-a}} = \frac{1}{4}$$